RECHERCHES

SUR

L'HYDRODYNAMIQUE,

PAR

Pierre DUHEM,

CORRESPONDANT DE L'INSTITUT DE FRANCE,
PROFESSEUR DE PHYSIQUE THÉORIQUE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX.

PREMIÈRE SÉRIE.

PRINCIPES FONDAMENTAUX DE L'HYDRODYNAMIQUE.
PROPAGATION DES DISCONTINUITÉS, DES ONDES ET DES QUASI-ONDES.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1903

RECHERCHES

SUR

L'HYDRODYNAMIQUE.

Extrait des *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e Série, t. III, IV et V; 1901, 1902 et 1903.

RECHERCHES

SUR

L'HYDRODYNAMIQUE,

PAR

Pierre DUHEM,

CORRESPONDANT DE L'INSTITUT DE FRANCE,
PROFESSEUR DE PHYSIQUE THÉORIQUE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX

PREMIÈRE SÉRIE.

PRINCIPES FONDAMENTAUX DE L'HYDRODYNAMIQUE.
PROPAGATION DES DISCONTINUITÉS, DES ONDES ET DES QUASI-ONDES.





PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1903

RECHERCHES SUR L'HYDRODYNAMIQUE.

PREMIÈRE PARTIE.

SUR LES PRINCIPES FONDAMENTAUX DE L'HYDRODYNAMIQUE.

INTRODUCTION.

En donnant à la Mécanique rationnelle une forme nouvelle et beaucoup plus générale que celle qu'elle avait reçue jusqu'ici, la Thermodynamique nous oblige à une revision de toutes les sciences que l'on regardait autrefois comme des branches de la Mécanique. En diverses publications ([1]), nous avons déjà entrepris une telle revision pour les principes de l'Hydrostatique. Nous nous proposons aujourd'hui de soumettre à une analyse semblable les fondements de la Dynamique des Fluides.

CHAPITRE I.

LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DES FLUIDES.

§ I. — Comment on passe des équations de l'équilibre d'un système aux équations du mouvement du système. — De la viscosité en général.

Considérons un système indépendant des corps extérieurs. Supposons que ce système soit défini par la température absolue T de chacune de ses parties et par des *variables normales*. Soit $\mathfrak{F}$ le potentiel interne de ce système. Dans une

([1]) *Voir*, notamment, *Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3ᵉ série, t. X, p. 183; 1893).

modification virtuelle qui laisse invariable la température de chacune des parties du système, ce potentiel éprouve une variation $\delta_T \mathcal{F}$. Dans la même modification, les actions extérieures auxquelles le système est soumis effectuent un travail $d\mathcal{T}_e$. Les conditions d'équilibre du système s'obtiennent en écrivant que l'on a, pour toute modification qui laisse invariable la température de chaque partie,

$$d\mathcal{T}_e - \delta_T \mathcal{F} = 0. \tag{1}$$

Lorsque le système est en mouvement, cette condition n'est plus exacte en général; on a alors, à chaque instant t, et pour toutes les modifications virtuelles et isothermiques que l'on peut imposer au système à partir de l'état qu'il traverse en cet instant,

$$d\mathcal{T}_e + d\mathcal{T}_j + d\mathcal{T}_v - \delta_T \mathcal{F} = 0, \tag{2}$$

$d\mathcal{T}_j$ étant le travail virtuel des *actions d'inertie* en la modification virtuelle considérée et $d\mathcal{T}_v$ étant, en la même modification, le travail virtuel des *actions de viscosité*.

La signification du premier terme est bien connue. Soient

dm, une masse élémentaire appartenant au système;
$\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$, les composantes de son accélération à l'instant t;
$\delta x, \delta y, \delta z$, les composantes du déplacement subi par un point de cette masse en la modification virtuelle considérée.

L'expression

$$d\mathcal{T}_j = -\int (\gamma_x \delta x + \gamma_y \delta y + \gamma_z \delta z)\, dm, \tag{3}$$

où l'intégrale s'étend au système entier, définit le travail virtuel des actions d'inertie.

La définition du travail virtuel des actions de viscosité nécessite quelques développements.

Les propositions suivantes touchant les actions de viscosité ont été données soit à titre d'hypothèses, soit à titre de théorèmes, dans un cours sur les *Fondements de l'Énergétique,* professé à la Faculté des Sciences de Bordeaux, en 1898-1899.

I. Supposons un système de température absolue uniforme T, et défini par cette température absolue et des variables normales $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$. Le travail virtuel des actions de viscosité en une modification *isothermique ou non* a pour expression

$$d\mathcal{T}_v = f_\alpha \delta\alpha + f_\beta \delta\beta + \ldots + f_\lambda \delta\lambda. \tag{4}$$

Les actions de viscosité $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda$ dépendent des variables suivantes :

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \lambda, \quad T,$$

$$\frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{d\beta}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{d\lambda}{dt}.$$

II. Si l'une des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sert seulement à fixer la position absolue du système dans l'espace, les actions $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ ne dépendent pas de cette variable.

Si l'une des vitesses $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \ldots, \frac{d\lambda}{dt}$ définit seulement la vitesse d'un certain déplacement d'ensemble du système dans l'espace, les actions $f_\alpha, f_\beta, \ldots f_\lambda$ ne dépendent pas de cette vitesse.

Si la modification virtuelle

$$\delta\alpha, \quad \delta\beta, \quad \ldots, \quad \delta\lambda$$

correspond simplement à un déplacement d'ensemble du système dans l'espace, le travail virtuel $d\mathfrak{T}_v$ correspondant est nul.

III. Si l'on a

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0, \qquad \frac{d\beta}{dt} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{d\lambda}{dt} = 0,$$

on a aussi

$$f_\alpha = 0, \qquad f_\beta = 0, \qquad \ldots, \qquad f_\lambda = 0.$$

IV. On a, en toutes circonstances, la condition

$$f_\alpha \frac{d\alpha}{dt} + f_\beta \frac{d\beta}{dt} + \ldots + f_\lambda \frac{d\lambda}{dt} \leqq 0$$

qui peut s'énoncer ainsi :

En toute modification réelle du système, les actions de viscosité effectuent un travail nul ou négatif.

Nous avons vu par le n° II que ce travail est nul si la modification réelle du système se réduit à un déplacement d'ensemble; en général, il n'est nul que dans ce cas.

V. (*Hypothèse approximative.*) Comme première approximation, on peut

admettre, et nous admettrons dorénavant, que l'on a

$$(6)\qquad \begin{cases} f_\alpha = A_{\alpha\alpha}\dfrac{d\alpha}{dt} + A_{\alpha\beta}\dfrac{d\beta}{dt} + \ldots + A_{\alpha\lambda}\dfrac{d\lambda}{dt}, \\ f_\beta = A_{\beta\alpha}\dfrac{d\alpha}{dt} + A_{\beta\beta}\dfrac{d\beta}{dt} + \ldots + A_{\beta\lambda}\dfrac{d\lambda}{dt}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_\lambda = A_{\lambda\alpha}\dfrac{d\alpha}{dt} + A_{\lambda\beta}\dfrac{d\beta}{dt} + \ldots + A_{\lambda\lambda}\dfrac{d\lambda}{dt}, \end{cases}$$

les A ne dépendant plus que des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, T.

Considérons la forme quadratique $\mathfrak{F}$ en $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \ldots, \frac{d\lambda}{dt}$, définie par l'égalité

$$(7)\qquad \begin{aligned} -2\mathfrak{F} = {} & A_{\alpha\alpha}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + A_{\beta\beta}\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 + \ldots + A_{\lambda\lambda}\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 \\ & + \sum_{ij}(A_{ij} + A_{ji})\frac{di}{dt}\frac{dj}{dt}, \end{aligned}$$

le signe $\sum_{ij}$ représentant une somme qui s'étend à toutes les combinaisons des lettres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ deux à deux.

Nous avons alors

$$(8)\qquad f_\alpha\frac{d\alpha}{dt} + f_\beta\frac{d\beta}{dt} + \ldots + f_\lambda\frac{d\lambda}{dt} = -2\mathfrak{F}.$$

La condition (5) nous enseigne que la forme $\mathfrak{F}$ est positive, sauf dans le cas où la modification

$$\delta\alpha = \frac{d\alpha}{dt}dt, \qquad \delta\beta = \frac{d\beta}{dt}dt, \qquad \ldots, \qquad \delta\lambda = \frac{d\lambda}{dt}dt$$

se réduit à un déplacement d'ensemble du système.

VI. (*Hypothèse de lord Rayleigh*). On peut encore, avec lord Rayleigh, supposer que l'on a

$$(9)\qquad A_{ij} = A_{ji}.$$

La comparaison des égalités (6) et (7) donne alors

$$(10)\qquad f_\alpha = -\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\frac{d\alpha}{dt}}, \qquad f_\beta = -\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\frac{d\beta}{dt}}, \qquad \ldots, \qquad f_\lambda = -\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\frac{d\lambda}{dt}}.$$

La fonction $\mathfrak{F}$ a reçu de lord Rayleigh le nom de *fonction de dissipation;* lord Kelvin et M. Tait la nomment *dissipativité.*

Selon l'égalité (8), au cours de la modification réelle que le système subit dans le temps dt, les actions de viscosité effectuent un travail $-2\mathfrak{F}\,dt$.

VII. Si un système est formé de plusieurs parties contiguës, ces parties sont dites *soudées entre elles* lorsque deux points matériels infiniment voisins et situés de part et d'autre de la surface de contact éprouvent en toutes circonstances des déplacements soit réels, soit virtuels, qui diffèrent infiniment peu.

Appelons actions de viscosité *intrinsèques* à chacune de ces parties les actions de viscosité qui lui correspondraient si elle formait un système indépendant.

Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Lorsque toutes les parties, de même température ou de températures différentes, qui composent un système sont soudées entre elles, les actions de viscosité effectuent, en une modification réelle ou virtuelle de ce système, un travail qui est la somme des travaux des viscosités intrinsèques des diverses parties.

Considérons n quantités infiniment petites $\delta a, \delta b, \ldots, \delta l$, liées aux n modifications réelles ou virtuelles $\delta\alpha, \ldots, \delta\lambda$ par les n relations

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} \delta a = L_{a\alpha}\,\delta\alpha + L_{a\beta}\,\delta\beta + \ldots + L_{a\lambda}\,\delta\lambda, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \delta l = L_{l\alpha}\,\delta\alpha + L_{l\beta}\,\delta\beta + \ldots + L_{l\lambda}\,\delta\lambda, \end{array}\right.$$

où les quantités L_{ij} sont des fonctions des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, et que nous supposons non intégrables.

Supposons que le déterminant des L_{ij} ne soit pas nul, de telle sorte qu'on puisse résoudre les équations (11) sous la forme

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} \delta\alpha = M_{\alpha a}\,\delta a + M_{\alpha b}\,\delta b + \ldots + M_{\alpha l}\,\delta l, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \delta\lambda = M_{\lambda a}\,\delta a + M_{\lambda b}\,\delta b + \ldots + M_{\lambda l}\,\delta l. \end{array}\right.$$

Les égalités (11) nous enseignent qu'*à toute modification infiniment petite, réelle ou virtuelle, imposée au système à partir d'un état déterminé, correspond un système déterminé de valeurs infiniment petites de* $\delta a, \delta b, \ldots, \delta l$.

Les égalités (12) nous enseignent que réciproquement, *à tout système de valeurs infiniment petites de* $\delta a, \delta b, \ldots, \delta l, \delta T$ *correspond une modification infiniment petite déterminée, réelle ou virtuelle, du système pris dans un état déterminé.*

Les variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ étant supposées des variables normales, le travail

externe $d\mathfrak{T}_e$ et le travail d'inertie $d\mathfrak{T}_j$ sont de la forme suivante :

$$(13) \qquad d\mathfrak{T}_e = A\,\delta\alpha + B\,\delta\beta + \ldots + L\,\delta\lambda,$$

$$(14) \qquad d\mathfrak{T}_j = J_\alpha\,\delta\alpha + J_\beta\,\delta\beta + \ldots + J_\lambda\,\delta\lambda.$$

Ni l'un ni l'autre ne renferme de terme en δT; de plus, les grandeurs A, B, ..., L sont indépendantes de T; les grandeurs $J_\alpha, J_\beta, \ldots, J_\lambda$ sont indépendantes de T, de $\frac{dT}{dt}$ et de $\frac{d^2T}{dt^2}$.

Si nous posons

$$(15) \qquad \begin{cases} P_a = A\,M_{\alpha a} + B\,M_{\beta a} + \ldots + L\,M_{\lambda a}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ P_l = A\,M_{\alpha l} + B\,M_{\beta l} + \ldots + L\,M_{\lambda l}, \end{cases}$$

et

$$(16) \qquad \begin{cases} j_a = J_\alpha M_{\alpha a} + J_\beta M_{\beta a} + \ldots + J_\lambda M_{\lambda a}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ j_l = J_\alpha M_{\alpha l} + J_\beta M_{\beta l} + \ldots + J_\lambda M_{\lambda l}, \end{cases}$$

cas auquel les quantités

$$P_a, \quad P_b, \quad \ldots, \quad P_l$$

seront indépendantes de T et les quantités

$$j_a, \quad j_b, \quad \ldots, \quad j_l$$

indépendantes de T, de $\frac{dT}{dt}$ et de $\frac{d^2T}{dt^2}$, nous aurons

$$(17) \qquad d\mathfrak{T}_e = P_a\,\delta a + P_b\,\delta b + \ldots + P_l\,\delta l,$$

$$(18) \qquad d\mathfrak{T}_j = j_a\,\delta a + j_b\,\delta b + \ldots + j_l\,\delta l.$$

Posons de même

$$(19) \qquad \begin{cases} g_a = f_\alpha M_{\alpha a} + f_\beta M_{\beta a} + \ldots + f_\lambda M_{\lambda a}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ g_l = f_\alpha M_{\alpha l} + f_\beta M_{\beta l} + \ldots + f_\lambda M_{\lambda l}. \end{cases}$$

Comme $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda$, les quantités $g_a, g_b, \ldots, g_l$ seront déterminées si l'on connaît l'état du système à l'instant t et, en outre, $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \ldots, \frac{d\lambda}{dt}$; comme f_α, $f_\beta, \ldots, f_\lambda$, elles s'annuleront toutes si ces n dernières quantités s'annulent toutes.

Désignons par $da, db, \ldots, dl$ les valeurs que prennent réellement $\delta a, \delta b, \ldots,$

δl pendant le temps infiniment petit dt. Les égalités (11) et (12) nous donneront

$$(11\ bis)\quad \begin{cases} \frac{da}{dt} = L_{a\alpha}\frac{d\alpha}{dt} + L_{a\beta}\frac{d\beta}{dt} + \ldots + L_{a\lambda}\frac{d\lambda}{dt}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{dl}{dt} = L_{l\alpha}\frac{d\alpha}{dt} + L_{l\beta}\frac{d\beta}{dt} + \ldots + L_{l\lambda}\frac{d\lambda}{dt}, \end{cases}$$

$$(12\ bis)\quad \begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = M_{\alpha a}\frac{da}{dt} + M_{\alpha b}\frac{db}{dt} + \ldots + M_{\alpha l}\frac{dl}{dt}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{d\lambda}{dt} = M_{\lambda a}\frac{da}{dt} + M_{\lambda b}\frac{db}{dt} + \ldots + M_{\lambda l}\frac{dl}{dt}. \end{cases}$$

Les égalités (12 *bis*) nous montrent que, lorsqu'on connaît $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \ldots, \frac{dl}{dt}$, on connaît aussi $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \ldots, \frac{d\lambda}{dt}$, et que, pour que ces n dernières quantités s'annulent, il faut et il suffit que les n premières s'annulent. Nous pouvons donc dire que, *lorsque l'on connaît l'état du système à l'instant t et, en outre, les quantités $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \ldots, \frac{dl}{dt}$, on connaît les quantités $g_a, g_b, \ldots, g_l$; et que les n égalités*

$$(20)\qquad \frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{db}{dt} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{dl}{dt} = 0$$

entraînent les n autres égalités

$$(21)\qquad g_a = 0, \quad g_b = 0, \quad \ldots, \quad g_l = 0.$$

Moyennant l'introduction de ces quantités, l'égalité (4) peut s'écrire

$$(22)\qquad d\mathfrak{E}_v = g_a\,\delta a + g_b\,\delta b + \ldots + g_l\,\delta l.$$

La condition (8) devient alors

$$(23)\qquad g_a\frac{da}{dt} + g_b\frac{db}{dt} + \ldots + g_l\frac{dl}{dt} \leqq 0.$$

Le signe d'égalité convient certainement si la modification

$$\delta a = da, \quad \delta b = db, \quad \ldots, \quad \delta l = dl$$

se réduit à un déplacement d'ensemble du système.

Supposons que les quantités

$$f_\alpha, \quad f_\beta, \quad \ldots, \quad f_\lambda$$

soient de la forme (6); nous aurons sûrement, en vertu des égalités (19) et (12 *bis*),

$$(20)\quad \begin{cases} g_a = B_{aa}\dfrac{da}{dt} + B_{ab}\dfrac{db}{dt} + \ldots + B_{al}\dfrac{dl}{dt}, \\ g_b = B_{ba}\dfrac{da}{dt} + B_{bb}\dfrac{db}{dt} + \ldots + B_{bl}\dfrac{dl}{dt}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ g_l = B_{la}\dfrac{da}{dt} + B_{lb}\dfrac{db}{dt} + \ldots + B_{ll}\dfrac{dl}{dt}, \end{cases}$$

avec

$$(21)\quad \begin{cases} B_{aa} = M_{\alpha a}^2 A_{\alpha\alpha} + M_{\alpha a} M_{\beta a} A_{\alpha\beta} + \ldots + M_{\alpha a} M_{\lambda a} A_{\alpha\lambda} \\ \quad + M_{\beta a} M_{\alpha a} A_{\beta\alpha} + M_{\beta a}^2 A_{\beta\beta} + \ldots + M_{\beta a} M_{\lambda a} A_{\beta\lambda} \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad + M_{\lambda a} M_{\alpha a} A_{\lambda\alpha} + M_{\lambda a} M_{\beta a} A_{\lambda\beta} + \ldots + M_{\lambda a}^2 A_{\lambda\lambda}, \\ B_{ab} = M_{\alpha a} M_{\alpha b} A_{\alpha\alpha} + M_{\alpha a} M_{\beta b} A_{\alpha\beta} + \ldots + M_{\alpha a} M_{\lambda b} A_{\alpha\lambda} \\ \quad + M_{\beta a} M_{\alpha b} A_{\beta\alpha} + M_{\beta a} M_{\beta b} A_{\beta\beta} + \ldots + M_{\beta a} M_{\lambda b} A_{\beta\lambda} \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \quad + M_{\lambda a} M_{\alpha b} A_{\lambda\alpha} + M_{\lambda a} M_{\beta b} A_{\lambda\beta} + \ldots + M_{\lambda a} M_{\lambda b} A_{\lambda\lambda}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ B_{ba} = M_{\alpha b} M_{\alpha a} A_{\alpha\alpha} + M_{\alpha b} M_{\beta a} A_{\alpha\beta} + \ldots + M_{\alpha b} M_{\lambda a} A_{\alpha\lambda} \\ \quad + M_{\beta b} M_{\alpha a} A_{\beta\alpha} + M_{\beta b} M_{\beta a} A_{\beta\beta} + \ldots + M_{\beta b} M_{\lambda a} A_{\beta\lambda} \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad + M_{\lambda b} M_{\alpha a} A_{\lambda\alpha} + M_{\lambda b} M_{\beta a} A_{\lambda\beta} + \ldots + M_{\lambda b} M_{\lambda a} A_{\lambda\lambda}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

A l'inspection de ces formules, on voit de suite que, si l'on a

$$(9)\qquad A_{ij} = A_{ji},$$

on a aussi

$$(22)\qquad B_{ij} = B_{ji},$$

en sorte que l'hypothèse de lord Rayleigh entraîne la conséquence suivante :

La fonction $\mathfrak{G}$, *que définit l'égalité*

$$(23)\quad -2\mathfrak{G} = B_{aa}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + B_{bb}\left(\frac{db}{dt}\right)^2 + \ldots + B_{ll}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \sum_{ij}(B_{ij} + B_{ji})\frac{di}{dt}\frac{dj}{dt},$$

est telle que l'on ait

$$(24)\qquad g_a = -\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \frac{da}{dt}}, \qquad g_b = -\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \frac{db}{dt}}, \qquad \ldots, \qquad g_l = -\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \frac{dl}{dt}}.$$

Alors, le travail des actions de viscosité dans une modification réelle du système a pour valeur $-2\mathfrak{G}\,dt$.

Voici maintenant ce qui fait l'intérêt des considérations qui viennent d'être développées.

Dans un grand nombre de cas, l'état du système que l'on étudie n'est pas défini explicitement par un certain nombre de variables indépendantes $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, T$; on sait seulement que tout changement infiniment petit, réel ou virtuel, de l'état du système est défini par une variation infiniment petite δT de la température absolue et par n quantités infiniment petites $\delta a, \delta b, \ldots, \delta l$, indépendantes entre elles et indépendantes de δT; dans le cas particulier où il s'agit de la modification réelle éprouvée par le système pendant le temps dt, $\delta a, \delta b, \ldots, \delta l$ sont représentés par $da, db, \ldots, dl$.

Dans ces cas, on continue à admettre l'exactitude de l'égalité (2), où $\mathcal{F}$ désigne une quantité qui a, en chaque état du système, une valeur déterminée et où $\delta_T \mathcal{F}$ est la variation éprouvée par cette quantité au cours de la modification que l'on obtient en joignant $\delta T = 0$ à des valeurs arbitraires de $\delta a, \delta b, \ldots, \delta l$.

Supposons que le travail externe $d\mathfrak{T}_e$ et le travail d'inertie $d\mathfrak{T}_j$ puissent prendre les formes (17) et (18), où $P_a, P_b, \ldots, P_l$ sont des quantités indépendantes de T, tandis que les quantités $j_a, j_b, \ldots, j_l$ sont indépendantes de T, de $\frac{dT}{dt}$ et de $\frac{d^2T}{dt^2}$. Nous dirons que $\delta a, \delta b, \ldots, \delta l, \delta T$ forment un système de *variations normales*.

Lorsque les changements infiniment petits qu'un système peut éprouver seront définis au moyen d'un système de variations normales, nous admettrons, touchant le travail de viscosité $d\mathfrak{T}_v$, les hypothèses suivantes :

I. Ce travail est de la forme (22), les grandeurs $g_a, g_b, \ldots, g_l$ ayant des valeurs connues à l'instant t lorsque l'on connaît, à cet instant, l'état du système et, de plus, les valeurs de $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \ldots, \frac{dl}{dt}$.

II. Elles ne dépendent pas de la position absolue du système dans l'espace. Si l'une des variations $\delta a, \delta b, \ldots, \delta l$, soit δa, produit seulement un déplacement d'ensemble du système dans l'espace, les actions $g_a, g_b, \ldots, g_l$ ne dépendent pas de $\frac{da}{dt}$.

Si la modification réelle ou virtuelle $\delta a, \delta b, \ldots, \delta l$ correspond à un déplacement d'ensemble du système dans l'espace, le travail $d\mathfrak{T}_v$ correspondant est nul.

III. Les égalités (20) entraînent les égalités (21).

IV. En toute modification réelle, la condition (23) est vérifiée.

V. (*Hypothèse approximative.*) Les quantités $g_a, g_b, \ldots, g_l$ sont données par les égalités (21), où les coefficients B sont indépendants de $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \ldots, \frac{dl}{dt}$.

VI. (*Hypothèse de lord Rayleigh.*) On a les égalités (22), ce qui, moyennant l'égalité de définition (23), entraîne les égalités (24).

VII. Cette dernière hypothèse s'énonce comme l'hypothèse de même rang, relative au cas où le système est rapporté à des variables normales explicitement connues.

Ces principes vont trouver leur application au paragraphe suivant.

§ 2. — De la viscosité en un corps qui subit une déformation homogène.

Considérons un corps qui se déforme et se déplace; soient δx, δy, δz les composantes du déplacement du point de ce corps dont les coordonnées initiales étaient x, y, z; δx, δy, δz sont, en général, des fonctions de x, y, z. Posons

$$(25)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\,\delta x}{\partial x} = \delta D_1, \quad \dfrac{\partial\,\delta y}{\partial y} = \delta D_2, \quad \dfrac{\partial\,\delta z}{\partial z} = \delta D_3, \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\,\delta y}{\partial z} + \dfrac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right) = \delta G_1, \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\,\delta z}{\partial x} + \dfrac{\partial\,\delta x}{\partial z}\right) = \delta G_2, \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\,\delta x}{\partial y} + \dfrac{\partial\,\delta y}{\partial x}\right) = \delta G_3. \end{cases}$$

Si les six quantités

$$\delta D_1, \quad \delta D_2, \quad \delta D_3, \quad \delta G_1, \quad \delta G_2, \quad \delta G_3$$

ont des valeurs indépendantes de x, y, z, nous dirons, avec W. Thomson et Tait, que le corps éprouve une *déformation homogène*.

Tout changement infiniment petit de position et de figure d'un corps dont toute déformation est homogène est défini par la connaissance de douze quantités infiniment petites, savoir :

1° Les trois composantes $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ d'une translation;

2° Les trois composantes $\delta\omega_1$, $\delta\omega_2$, $\delta\omega_3$ d'une rotation;

3° Les six quantités δD_1, δD_2, δD_3, δG_1, δG_2, δG_3 définies par les égalités (25).

Imaginons un corps dont toute modification infinitésimale est entièrement

déterminée lorsque l'on joint à ces douze quantités la variation infiniment petite δT de la température, et supposons que, pour ce corps, ces treize quantités forment un système de variations normales. Proposons-nous de déterminer, pour un tel corps, la forme des actions de viscosité.

Chacune des six variations $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, $\delta\omega_1$, $\delta\omega_2$, $\delta\omega_3$ entraîne simplement un déplacement d'ensemble du système dans l'espace. Dès lors, d'après les hypothèses I et II, on doit avoir

$$(26)\qquad d\mathfrak{E}_v = f_1\,\delta D_1 + f_2\,\delta D_2 + f_3\,\delta D_3 + g_1\,\delta G_1 + g_2\,\delta G_2 + g_3\,\delta G_3,$$

les six quantités

$$f_1,\quad f_2,\quad f_3,\quad g_1,\quad g_2,\quad g_3$$

dépendant de l'état du système à l'instant considéré et des six quantités

$$(27)\qquad \begin{cases} D'_1 = \dfrac{dD_1}{dt}, & D'_2 = \dfrac{dD_2}{dt}, & D'_3 = \dfrac{dD_3}{dt}, \\[2mm] G'_1 = \dfrac{dG_1}{dt}, & G'_2 = \dfrac{dG_2}{dt}, & G'_3 = \dfrac{dG_3}{dt}. \end{cases}$$

Si l'on admet l'hypothèse approximative V, les six quantités f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3 sont des fonctions linéaires et homogènes des six variables (27), les coefficients de ces fonctions dépendant de l'état du système à l'instant t.

Si l'on admet l'hypothèse de lord Rayleigh, elles dérivent d'une fonction de dissipation $\mathfrak{G}$; celle-ci est une forme quadratique des six variables (27); les coefficients de cette forme dépendent de l'état du système à l'instant t.

Le travail réel des actions de viscosité pendant le temps dt a pour valeur $-2\mathfrak{G}\,dt$; cette valeur ne saurait dépendre du choix des axes de coordonnées; un changement d'axes de coordonnées ne change donc pas la valeur de la fonction de dissipation $\mathfrak{G}$.

Considérons la déformation homogène qui, à chaque point (x, y, z) du système dans son état initial, ferait correspondre un nouveau point (x', y', z') par les formules

$$(28)\qquad \begin{cases} x' - x = D'_1(x - x_0) + G'_3(y - y_0) + G'_2(z - z_0), \\ y' - y = G'_3(x - x_0) + D'_2(y - y_0) + G'_1(z - z_0), \\ z' - z = G'_2(x - x_0) + G'_1(y - y_0) + D'_3(z - z_0), \end{cases}$$

(x_0, y_0, z_0) étant un point fixe quelconque.

A cette déformation homogène correspondent trois axes principaux de dilatation que nous nommerons OX, OY, OZ et trois dilatations principales que nous nommerons Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3.

Prenons pour nouveaux axes de coordonnées OX, OY, OZ; après ce change-

ment, nous avons, au lieu des six quantités (27), les six quantités

$$\Delta'_1, \quad \Delta'_2, \quad \Delta'_3,$$
$$0, \quad 0, \quad 0.$$

$\mathfrak{G}$, qui n'a pas changé de valeur par ce changement d'axes, est maintenant une forme quadratique de Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3.

Supposons maintenant que le corps étudié soit d'une nature telle que les déformations subies le laissent isotrope.

Dans ce cas, la fonction de dissipation $\mathfrak{G}$ doit garder la même valeur, soit que la dilatation principale ait, suivant OX, la valeur Δ'_1, suivant OY, la valeur Δ'_2, suivant OZ, la valeur Δ'_3, soit que l'on permute entre elles ces trois valeurs d'une manière quelconque.

La fonction de dissipation $\mathfrak{G}$ est alors une fonction symétrique des trois quantités Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3.

Or les trois quantités Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3 sont, comme on sait, les trois racines de l'équation en Δ'

$$\begin{vmatrix} D'_1-\Delta' & G'_3 & G'_2 \\ G'_3 & D'_2-\Delta' & G'_1 \\ G'_2 & G'_1 & D'_3-\Delta' \end{vmatrix} = 0$$

qui, développée, s'écrit

$$(29) \quad \begin{aligned} &\Delta'^3 - (D'_1+D'_2+D'_3)\Delta'^2 \\ &+ (D'_2 D'_3 + D'_3 D'_1 + D'_1 D'_2 - G'^2_1 - G'^2_2 - G'^2_3)\Delta' \\ &- (D'_1 D'_2 D'_3 + 2G'_1 G'_2 G'_3 - D'_1 G'^2_1 - D'_2 G'^2_2 - D'_3 G'^2_3) = 0. \end{aligned}$$

La fonction de dissipation $\mathfrak{G}$, fonction symétrique des racines de cette équation, doit s'exprimer en fonction rationnelle de ses coefficients, qui sont :

$$D'_1 + D'_2 + D'_3,$$
$$D'_2 D'_3 + D'_3 D'_1 + D'_1 D'_2 - G'^2_1 - G'^2_2 - G'^2_3,$$
$$D'_1 D'_2 D'_3 + 2G'_1 G'_2 G'_3 - D'_1 G'^2_1 - D'_2 G'^2_2 - D'_3 G'^2_3.$$

Mais comme elle doit être une forme quadratique des six grandeurs

$$D'_1, \quad D'_2, \quad D'_3, \quad G'_1, \quad G'_2, \quad G'_3,$$

elle s'exprime forcément par l'égalité

$$(30) \quad \mathfrak{G} = A(D'_1 + D'_2 + D'_3)^2 + B(D'_2 D'_3 + D'_3 D'_1 + D'_1 D'_2 - G'^2_1 - G'^2_2 - G'^2_3),$$

A et B étant deux quantités qui dépendent seulement de l'état du système à l'instant t.

En vertu des relations entre les coefficients et les racines de l'équation (29), $\mathfrak{G}$ peut encore s'écrire

$$(31)\qquad \mathfrak{G} = A(\Delta'_1 + \Delta'_2 + \Delta'_3)^2 + B(\Delta'_2\Delta'_3 + \Delta'_3\Delta'_1 + \Delta'_1\Delta'_2),$$

ou bien

$$(32)\qquad \mathfrak{G} = \frac{2A+B}{2}(\Delta'_1 + \Delta'_2 + \Delta'_3)^2 - \frac{B}{2}(\Delta'^2_1 + \Delta'^2_2 + \Delta'^2_3).$$

Introduisons, au lieu des coefficients A et B, deux nouveaux coefficients L et M, liés aux précédents par les relations

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} 2A + B &= L, \\ B &= -2M. \end{aligned}\right.$$

Les égalités (30) et (32) deviendront respectivement

$$(30\ bis)\qquad \mathfrak{G} = \frac{L+2M}{2}(D'_1 + D'_2 + D'_3)^2 - 2M(D'_2D'_3 + D'_3D'_1 + D'_1D'_2 - G'^2_1 - G'^2_2 - G'^2_3),$$

$$(32\ bis)\qquad \mathfrak{G} = \frac{L}{2}(\Delta'_1 + \Delta'_2 + \Delta'_3)^2 + M(\Delta'^2_1 + \Delta'^2_2 + \Delta'^2_3).$$

On voit encore sans peine que l'égalité (30 *bis*) peut s'écrire

$$(34)\qquad \mathfrak{G} = \frac{3L+2M}{6}(D'_1 + D'_2 + D'_3)^2 + \frac{M}{3}[(D'_2 - D'_3)^2 + (D'_3 - D'_1)^2 + (D'_1 - D'_2)^2 + 6(G'^2_1 + G'^2_2 + G'^2_3)].$$

Le travail réel des actions de viscosité, pendant le temps dt, est $-2\mathfrak{G}\,dt$. Ce travail ne peut être positif, en sorte que l'on doit avoir

$$(35)\qquad \mathfrak{G} \geqq 0.$$

Admettons tout d'abord que le système ne puisse éprouver aucune déformation qui n'entraîne un travail de viscosité; nous devrons avoir

$$(36)\qquad \mathfrak{G} > 0$$

toutes les fois que nous n'avons pas les six égalités

$$D'_1 = 0, \quad D'_2 = 0, \quad D'_3 = 0,$$
$$G'_1 = 0, \quad G'_2 = 0, \quad G'_3 = 0.$$

La forme quadratique $\mathfrak{G}$ sera une forme définie positive en G'_1, G'_2, G'_3, D'_1, D'_2, D'_3. Selon l'égalité (30 *bis*), son discriminant est

$$\begin{vmatrix} 2M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2M & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L+2M}{2} & \frac{L}{2} & \frac{L}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L}{2} & \frac{L+2M}{2} & \frac{L}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L}{2} & \frac{L}{2} & \frac{L+2M}{2} \end{vmatrix}.$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que la forme $\mathfrak{G}$ soit définie positive s'obtiennent à la manière ordinaire et sont les suivantes :

$$M > 0, \qquad M^2 > 0, \qquad M^3 > 0,$$
$$M^3(L + 2M) > 0, \qquad M^4(L + M) > 0,$$
$$M^5(3L + 2M) > 0.$$

Elles se réduisent d'ailleurs à ces deux-ci :

$$(37) \qquad M > 0,$$
$$(38) \qquad 3L + 2M > 0,$$

d'où découle, en particulier, l'inégalité

$$(39) \qquad L + 2M > 0.$$

L'égalité (34) montre en effet que, si les conditions (37) et (38) sont vérifiées, la forme $\mathfrak{G}$ est une forme définie positive.

On peut, sans contradiction, admettre que certaines déformations d'un système déterminé n'entraînent aucun travail des actions de viscosité; alors, l'une des inégalités (37) et (38) peut se transformer en égalité.

Supposons, tout d'abord, que l'inégalité (37) se transforme en égalité et que l'on ait

$$(37\ bis) \qquad M = 0.$$

La condition (38) devient

$$(38\ bis) \qquad L > 0$$

et l'égalité (34) devient

$$(34\ bis) \qquad \mathfrak{G} = \frac{L}{2}(D'_1 + D'_2 + D'_3)^2.$$

Une déformation du système entraîne un travail négatif des actions de viscosité, à moins que la vitesse de dilatation en volume $(D'_1 + D'_2 + D'_3)$ ne soit égale à o.

Supposons, en second lieu, que l'inégalité (38) se transforme en l'égalité

$$(38\ ter) \qquad 3L + 2M = 0.$$

La condition (37) subsiste. L'égalité (34) devient

$$(34\ ter) \quad \mathfrak{G} = \frac{M}{3}[(D'_2 - D'_3)^2 + (D'_3 - D'_1)^2 + (D'_1 - D'_2)^2 + 6(G'^2_1 + G'^2_2 + G'^2_3)].$$

Cette égalité nous enseigne que le travail réel des actions de viscosité est toujours négatif, à moins que l'on n'ait

$$G'_1 = 0, \quad G'_2 = 0, \quad G'_3 = 0,$$
$$D'_1 = D'_2 = D'_3,$$

cas auquel, entre les instants t et $(t + dt)$, le système se dilate en restant semblable à lui-même.

En vertu des égalités (24), on a

$$f_1 = -\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial D'_1}, \quad f_2 = -\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial D'_2}, \quad f_3 = -\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial D'_3},$$
$$g_1 = -\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial G'_1}, \quad g_2 = -\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial G'_2}, \quad g_3 = -\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial G'_3}$$

ou bien, selon l'égalité (30 *bis*),

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} f_1 &= -L(D'_1 + D'_2 + D'_3) - 2MD'_1, \\ f_2 &= -L(D'_1 + D'_2 + D'_3) - 2MD'_2, \\ f_3 &= -L(D'_1 + D'_2 + D'_3) - 2MD'_3, \\ g_1 &= -4MG'_1, \\ g_2 &= -4MG'_2, \\ g_3 &= -4MG'_3. \end{aligned} \right.$$

§ 3. — De la viscosité au sein d'une masse fluide.

Considérons une masse fluide et supposons que les modifications réelles ou virtuelles auxquelles elle peut être soumise soient constamment assujetties aux conditions suivantes :

1° Soient, en un déplacement virtuel, δx, δy, δz les composantes du déplacement du point matériel dont les coordonnées initiales sont x, y, z; δx, δy, δz *sont des fonctions continues de* x, y, z.

2° Soient u, v, w les composantes, à l'instant t, de la vitesse du point matériel dont les coordonnées sont x, y, z; u, v, w *sont des fonctions continues de* x, y, z.

Moyennant ces deux conditions, les liaisons qui existent entre les divers éléments du fluide sont des soudures.

Donc, selon l'hypothèse marquée VII au § 1, le travail réel ou virtuel des actions de viscosité au sein de la masse fluide est égal à la somme des travaux des viscosités intrinsèques des divers éléments en lesquels cette masse peut être décomposée.

Soit $d\varpi$ le volume d'un tel élément et soit $d\tau_v\, d\varpi$ le travail virtuel de ses viscosités intrinsèques. On aura

$$d\mathfrak{E}_v = \int d\tau_v\, d\varpi, \tag{41}$$

l'intégrale s'étendant au volume entier du fluide. Toute notre attention doit donc porter sur la détermination de $d\tau_v$.

$d\tau_v$ dépend de l'état de l'élément $d\varpi$ à l'instant t, des vitesses relatives des diverses parties de cet élément, enfin du déplacement virtuel relatif de ces diverses parties.

On doit regarder comme évident que la quantité $d\tau_v$ sera altérée seulement d'une quantité infiniment petite par rapport à elle-même si l'on effectue la double substitution que voici :

1° Au déplacement virtuel subi par l'élément $d\varpi$, on substitue un autre déplacement virtuel, tel que le déplacement virtuel relatif de deux parties quelconques de l'élément $d\varpi$ ne soit altéré que d'une quantité infiniment petite par rapport à lui-même.

2° Au déplacement réel que l'élément $d\varpi$ subit pendant le temps dt, on substitue un autre déplacement infiniment petit, accompli pendant le même temps, et tel que la vitesse relative de deux parties quelconques de l'élément $d\varpi$ ne subisse qu'une altération infiniment petite par rapport à elle-même.

Or, il est visible qu'on peut satisfaire à la première condition en substituant au déplacement virtuel subi par l'élément $d\varpi$ une certaine déformation homogène

dans laquelle

$$(42)\quad \begin{cases} D_1 = \dfrac{\partial\,\delta x}{\partial x}, \quad D_2 = \dfrac{\partial\,\delta y}{\partial y}, \quad D_3 = \dfrac{\partial\,\delta z}{\partial z}, \\ G_1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\,\delta y}{\partial z} + \dfrac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right), \\ G_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\,\delta z}{\partial x} + \dfrac{\partial\,\delta x}{\partial z}\right), \\ G_3 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\,\delta x}{\partial y} + \dfrac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right), \end{cases}$$

les six seconds membres étant calculés pour un point arbitrairement choisi de l'élément $d\varpi$.

Il est visible que l'on peut satisfaire à la seconde condition en substituant au mouvement réel de l'élément $d\varpi$, pendant le temps dt, une certaine déformation homogène de même durée, dans laquelle

$$(43)\quad \begin{cases} D'_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad D'_2 = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \quad D'_3 = \dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ G'_1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right), \\ G'_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right), \\ G'_3 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right), \end{cases}$$

les seconds membres étant calculés en un point arbitrairement choisi de l'élément $d\varpi$.

Il est clair désormais que la détermination de $d\tau_v\, d\varpi$ est ramenée au problème qui a été traité au paragraphe précédent.

Posons

$$(44)\quad \begin{cases} f_1 = \nu_x\, d\varpi, & f_2 = \nu_y\, d\varpi, & f_3 = \nu_z\, d\varpi, \\ g_1 = 2\tau_x\, d\varpi, & g_2 = 2\tau_y\, d\varpi, & g_3 = 2\tau_z\, d\varpi. \end{cases}$$

Les égalités (26) et (42) nous donneront

$$(45)\quad \begin{aligned} d\tau_v = {} & \nu_x \frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \nu_y \frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \nu_z \frac{\partial\,\delta z}{\partial z} \\ & + \tau_x\left(\frac{\partial\,\delta y}{\partial z} + \frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right) + \tau_y\left(\frac{\partial\,\delta z}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta x}{\partial z}\right) + \tau_z\left(\frac{\partial\,\delta x}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta y}{\partial x}\right). \end{aligned}$$

Moyennant les égalités (41) et (45), le travail des actions de viscosité dans une modification réelle ou virtuelle quelconque a pour valeur

$$(46)\qquad d\mathfrak{T}_v = \int \Big[\nu_x \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \nu_y \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \nu_z \frac{\partial \delta z}{\partial z} + \tau_x \left(\frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y} \right) + \tau_y \left(\frac{\partial \delta z}{\partial x} + \frac{\partial \delta x}{\partial z} \right) + \tau_z \left(\frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right) \Big] d\varpi.$$

Cette égalité est susceptible d'une transformation dont la légitimité est subordonnée à la condition suivante :

Les six quantités $\nu_x, \nu_y, \nu_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$ admettent, en tous les points du milieu, des dérivées partielles qui sont finies.

Dans ce cas, si l'on désigne par dS un élément de la surface qui limite le fluide, par n_i la normale à l'élément dS vers l'intérieur du fluide, une intégration par parties transforme l'égalité (46) en la suivante :

$$(47)\qquad \begin{aligned} d\mathfrak{T}_v = -\int \Big\{ & [\nu_x \cos(n_i, x) + \tau_z \cos(n_i, y) + \tau_y \cos(n_i, z)]\, \delta x \\ & + [\tau_z \cos(n_i, x) + \nu_y \cos(n_i, y) + \tau_x \cos(n_i, z)]\, \delta y \\ & + [\tau_y \cos(n_i, x) + \tau_x \cos(n_i, y) + \nu_z \cos(n_i, z)]\, \delta z \Big\} dS \\ \int \Big[& \left(\frac{\partial \nu_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} \right) \delta x \\ & + \left(\frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \nu_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} \right) \delta y \\ & + \left(\frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \nu_z}{\partial z} \right) \delta z \Big] d\varpi. \end{aligned}$$

La première intégration s'étend à toute la surface qui limite le fluide.

Donc, DANS LE CAS OÙ LA CONDITION PRÉCÉDENTE EST VÉRIFIÉE, *les actions de viscosité équivalent à l'ensemble des actions suivantes :*

1° *Une pression en chaque point de la surface terminale du fluide, pression qui a pour composantes :*

$$(48)\qquad \begin{cases} p_x = -[\nu_x \cos(n_i, x) + \tau_z \cos(n_i, y) + \tau_y \cos(n_i, z)], \\ p_y = -[\tau_z \cos(n_i, x) + \nu_y \cos(n_i, y) + \tau_x \cos(n_i, z)], \\ p_z = -[\tau_y \cos(n_i, x) + \tau_x \cos(n_i, y) + \nu_z \cos(n_i, z)]. \end{cases}$$

2° *Un champ en tous les points du volume fluide, champ dont les compo-*

santes sont

$$(49)\quad \begin{cases} q_x = -\left(\dfrac{\partial \nu_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_z}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_y}{\partial z}\right), \\ q_y = -\left(\dfrac{\partial \tau_z}{\partial x} + \dfrac{\partial \nu_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_x}{\partial z}\right), \\ q_z = -\left(\dfrac{\partial \tau_y}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \nu_z}{\partial z}\right). \end{cases}$$

Ce que nous venons de dire en ce § 3 ne suppose pas que le système étudié soit un fluide, mais seulement un milieu continu ; il n'en sera plus de même de ce qui va suivre ; nous admettrons, en effet, l'HYPOTHÈSE que voici :

Quelque déformation que subisse le milieu étudié, il demeure isotrope.

Cette hypothèse est assurément fausse en ce qui concerne les milieux solides ; il est même certain qu'elle n'est point toujours vraie pour les fluides, puisqu'un fluide en mouvement devient biréfringent. Si donc nous l'adoptons, ce n'est qu'à titre de première approximation.

Si nous admettons cette hypothèse, nous pourrons, pour déterminer f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3, faire usage des égalités (40).

L'état de l'élément $d\varpi$, à l'instant t, sera supposé entièrement défini par sa densité ρ et sa température absolue T ; on pourra alors poser

$$(50)\quad \begin{cases} L = \lambda(\rho, T)\, d\varpi, \\ M = \mu(\rho, T)\, d\varpi. \end{cases}$$

Les égalités (40), (43), (44) et (50) donneront

$$(51)\quad \begin{cases} \nu_x = -\lambda(\rho, T)\theta - 2\mu(\rho, T)\dfrac{\partial u}{\partial x}, \\ \nu_y = -\lambda(\rho, T)\theta - 2\mu(\rho, T)\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \nu_z = -\lambda(\rho, T)\theta - 2\mu(\rho, T)\dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ \tau_x = -\mu(\rho, T)\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right), \\ \tau_y = -\mu(\rho, T)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right), \\ \tau_z = -\mu(\rho, T)\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right), \end{cases}$$

en posant, selon l'usage,

$$(52)\quad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

En vertu des égalités (30 *bis*), (43), (50) et (52), on a

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{D}\, d\varpi, \tag{53}$$

avec

$$\mathfrak{D} = \frac{\lambda(\rho, \mathrm{T})}{2}\theta^2 + \mu(\rho, \mathrm{T})\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]. \tag{54}$$

Si l'on considère la modification réelle que le système éprouve pendant le temps dt, on a, en cette modification,

$$\delta x = u\, dt, \qquad \delta z = v\, dt, \qquad \delta z = w\, dt.$$

Si l'on reporte ces valeurs dans l'égalité (46), et si l'on tient compte des égalités (51), (52), (54), on trouve que, pendant le temps dt, les actions de viscosité effectuent un travail

$$d\mathfrak{G}_v = -2\, dt \int \mathfrak{D}\, d\varpi = -2\, \mathfrak{f}\, dt, \tag{55}$$

en posant

$$\mathfrak{f} = \int \mathfrak{D}\, d\varpi. \tag{56}$$

Cette fonction $\mathfrak{f}$ est donc la *fonction de dissipation* du fluide.

Si, dans les égalités (48) et (49), nous reportons les valeurs des quantités ν et τ que donnent les égalités (51), nous trouvons

$$\left\{\begin{aligned} p_x &= \lambda\theta\cos(n_i, x) + \mu\frac{\partial u}{\partial n_i} + \mu\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n_i, x) + \frac{\partial v}{\partial x}\cos(n_i, y) + \frac{\partial w}{\partial x}\cos(n_i, z)\right], \\ p_y &= \lambda\theta\cos(n_i, y) + \mu\frac{\partial v}{\partial n_i} + \mu\left[\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n_i, x) + \frac{\partial v}{\partial y}\cos(n_i, y) + \frac{\partial w}{\partial y}\cos(n_i, z)\right], \\ p_z &= \lambda\theta\cos(n_i, z) + \mu\frac{\partial w}{\partial n_i} + \mu\left[\frac{\partial u}{\partial z}\cos(n_i, x) + \frac{\partial v}{\partial z}\cos(n_i, y) + \frac{\partial w}{\partial z}\cos(n_i, z)\right] \end{aligned}\right. \tag{57}$$

et

$$(58)\quad \left\{ \begin{aligned} q_x &= (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\Delta u + \theta\frac{\partial\lambda}{\partial x} \\ &\quad + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial\mu}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial\mu}{\partial z}, \\ q_y &= (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} + \mu\Delta v + \theta\frac{\partial\lambda}{\partial y} \\ &\quad + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial\mu}{\partial x} + 2\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\frac{\partial\mu}{\partial z}, \\ q_z &= (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z} + \mu\Delta w + \theta\frac{\partial\lambda}{\partial z} \\ &\quad + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial\mu}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\frac{\partial\mu}{\partial y} + 2\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial z}. \end{aligned} \right.$$

Dans les égalités (58), on a posé, pour abréger,

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial\lambda}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial\lambda}{\partial x}, \quad \ldots,$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial\mu}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial\mu}{\partial x}, \quad \ldots.$$

Le point matériel dont les coordonnées, à l'instant t, sont x, y, z, a pour coordonnées, à l'instant $(t+dt)$, les sommes $(x+u\,dt)$, $(y+v\,dt)$, $(z+w\,dt)$. Si ρ est sa densité à l'instant t, cette densité, à l'instant $(t+dt)$, est

$$\left(\rho + \frac{d\rho}{dt}dt\right)$$

et l'on sait que l'on a l'*équation de continuité*

$$(59)\qquad \frac{d\rho}{dt} + \rho\theta = 0.$$

Si la densité ρ est exprimée en fonction des variables indépendantes x, y, z, t, on a

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x}u + \frac{\partial\rho}{\partial y}v + \frac{\partial\rho}{\partial z}w,$$

en sorte que l'égalité (59) peut s'écrire plus explicitement

$$(60)\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0.$$

L'égalité (59) nous enseigne que, si le fluide étudié est tel que chaque élément

garde, au cours du mouvement, une densité invariable, cas auquel le fluide est dit *incompressible*, on a, en tout point et à tout instant,

$$\theta = 0. \tag{61}$$

Dès lors, l'examen des égalités (51) nous montre qu'*au sein d'un fluide incompressible, les actions de viscosité ne dépendent pas de la fonction* $\lambda(\rho, T)$, *mais seulement de la fonction* $\mu(\rho, T)$.

Lorsque l'on étudie des fluides compressibles, on peut se demander s'il existe une relation entre les deux fonctions $\lambda(\rho, T)$, $\mu(\rho, T)$ et, s'il en existe une, quelle est cette relation.

Les considérations précédentes fournissent seulement les conditions

$$\mu(\rho, T) \geqq 0, \tag{62}$$

$$3\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T) \geqq 0, \tag{63}$$

qui se tirent de la comparaison des conditions (37), (37 *bis*), (38), (38 *ter*) avec les égalités (50).

Des théories fondées sur des hypothèses physiques autres que celles que nous admettons ont conduit certains auteurs à particulariser davantage le choix des fonctions $\lambda(\rho, T)$, $\mu(\rho, T)$; les suppositions les plus diverses ont été émises.

Cauchy, dans un Mémoire inédit composé en 1822, puis en 1828 (*Anciens Exercices*, p. 183; 3[e] année) a émis l'hypothèse que l'on avait $\lambda = 0$, mais sans regarder cette hypothèse comme forcée.

En 1843 (*Comptes rendus*, t. XVII, p. 1240), Saint-Venant a proposé d'admettre l'égalité

$$3\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T) = 0, \tag{64}$$

selon laquelle une dilatation uniforme ne serait accompagnée d'aucun travail de viscosité. Cette opinion a été adoptée, en 1845, par Stokes (*Mathematical Papers*, Vol. I, p. 75), puis par G. Kirchhoff (*Theorie der Wärme*, p. 175), et dubitativement par M. L. Natanson (*Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie*, année 1901, p. 95).

M. O.-E. Meyer (*Journal de Crelle*, t. 78, p. 130; 1874. *Die kinetische Theorie der Gase*, p. 325; 1877) a proposé l'égalité

$$\lambda(\rho, T) = \mu(\rho, T).$$

Enfin, en 1829, Poisson (*Journal de l'École Polytechnique*, 20[e] Cahier, t. XIII, p. 174) a proposé de n'établir aucune relation entre les fonctions λ et μ.

Nous suivrons cette dernière opinion, qui renferme toutes les autres comme

cas particuliers; nous nous bornerons à remarquer que toutes les suppositions émises s'accordent avec la proposition suivante :

Pour tout fluide visqueux, on a les deux inégalités

$$\mu(\rho, T) > 0, \tag{62 bis}$$

$$\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T) > 0. \tag{65}$$

§ 4. — Nature des actions auxquelles sont soumis les fluides étudiés. Équations du mouvement de ces fluides.

Il nous faut maintenant, pour parvenir aux équations du mouvement des fluides, développer les quantités $d\mathcal{E}_e$ et $\delta_T\mathcal{F}$, ce qui ne se peut faire si l'on n'admet certaines hypothèses touchant les actions extérieures auxquelles le fluide est soumis et touchant la forme du potentiel interne. Les hypothèses que nous admettrons ici sont celles que nous avons admises autrefois en des recherches sur l'Hydrostatique [1].

Le potentiel interne sera de la forme

$$\mathcal{F} = \int \zeta(\rho, T)\, dm + \tfrac{1}{2} \int\int \psi(\rho, \rho', r)\, dm\, dm', \tag{66}$$

égalité dans laquelle

ρ est la densité en un point de la masse dm,
T la température absolue au même point,
r la distance d'un point de la masse élémentaire dm à un point de la masse élémentaire dm',

et les intégrations s'étendent toutes à la masse entière du fluide.

Nous supposons, bien entendu, que ces intégrales existent et qu'il en soit de même des intégrales suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} V_i(t, x, y, z) &= \int \psi(\rho, \rho', r)\, dm', \\ X_i(t, x, y, z) &= -\int \frac{\partial \psi(\rho, \rho', r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}\, dm', \\ Y_i(t, x, y, z) &= -\int \frac{\partial \psi(\rho, \rho', r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y}\, dm', \\ Z_i(t, x, y, z) &= -\int \frac{\partial \psi(\rho, \rho', r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z}\, dm', \\ A_i(t, x, y, z) &= -\int \frac{\partial \psi(\rho, \rho', r)}{\partial \rho}\, dm'. \end{aligned}\right. \tag{67}$$

[1] *Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique*; égalité (56) (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. X, p. 214; 1893).

Pour former ces fonctions V_i, X_i, Y_i, Z_i, A_i, il faut évidemment, au second membre, remplacer respectivement ρ, ρ' par $\rho(x, y, z, t)$, $\rho'(x, y, z, t)$; il faut donc connaître la figure du fluide et la distribution des densités en cette figure; mais il est inutile de connaître la valeur de la température aux divers points de la masse fluide.

On peut obtenir les fonctions V_i, X_i, Y_i, Z_i, A_i qui figurent dans les équations (67) en opérant de la manière suivante :

Soit R une indéterminée comprise entre les limites entre lesquelles ρ peut varier, de telle sorte que

$$\psi(R, \rho', r)$$

ait un sens. Considérons les fonctions

$$(68)\quad \begin{cases} \mathfrak{V}_i(R, x, y, z, t) = \displaystyle\int \psi(R, \rho', r)\, dm', \\ \mathfrak{X}_i(R, x, y, z, t) = -\displaystyle\int \frac{\partial \psi(R, \rho', r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} dm', \\ \mathfrak{Y}_i(R, x, y, z, t) = -\displaystyle\int \frac{\partial \psi(R, \rho', r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} dm', \\ \mathfrak{Z}_i(R, x, y, z, t) = -\displaystyle\int \frac{\partial \psi(R, \rho', r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} dm', \\ \mathfrak{A}_i(R, x, y, z, t) = -\displaystyle\int \frac{\partial \psi(R, \rho', r)}{\partial R} dm'. \end{cases}$$

Dans ces dernières fonctions, il suffit visiblement de faire

$$R = \rho(x, y, z, t)$$

pour obtenir les fonctions V_i, X_i, Y_i, Z_i, A_i que définissent les égalités (67).

Nous admettrons que la fonction $\mathfrak{V}_i(R, x, y, z, t)$ et ses dérivées partielles de tous les ordres par rapport à R existent et ont des valeurs finies. Nous admettrons en outre que les dérivées partielles par rapport à x, y, z, t de $\mathfrak{V}_i$ ou de ses dérivées partielles $\frac{\partial \mathfrak{V}_i}{\partial R}$, $\frac{\partial^2 \mathfrak{V}_i}{\partial R^2}$, ... existent jusqu'à l'ordre n et ont des valeurs finies, si les dérivées partielles de ρ par rapport à x, y, z, t existent jusqu'à l'ordre $(n-1)$ et ont des valeurs finies; nous supposerons que la continuité de ces dernières dérivées assure la continuité des premières.

Les égalités

$$\frac{\partial V_i}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{V}_i}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{V}_i}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{V}_i}{\partial x^2} + 2\frac{\partial \mathfrak{V}_i}{\partial \rho\, \partial x}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial^2 \mathfrak{V}_i}{\partial \rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \mathfrak{V}_i}{\partial \rho}\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2},$$

....

montrent alors que les dérivées partielles par rapport à x, y, z, t de V_i, de A_i, ... existent jusqu'à l'ordre n et ont des valeurs finies si les dérivées partielles de ρ par rapport à x, y, z, t existent jusqu'à l'ordre n et ont des valeurs finies.

La première des égalités (67) nous permet d'écrire

$$\int\int \psi(\rho, \rho', r)\, dm\, dm' = \int V_i\, dm$$

et, partant, de mettre l'égalité (66) sous la forme

$$(69) \qquad \mathcal{F} = \int \zeta(\rho, T)\, dm + \tfrac{1}{2}\int V_i\, dm.$$

Pour former l'expression du travail $d\mathfrak{T}_e$ des actions extérieures, nous admettrons qu'il existe quatre fonctions

$$\mathfrak{X}_e(R, x, y, z, t), \quad \mathfrak{Y}_e(R, x, y, z, t), \quad \mathfrak{Z}_e(R, x, y, z, t), \quad \mathfrak{A}_e(R, x, y, z, t)$$

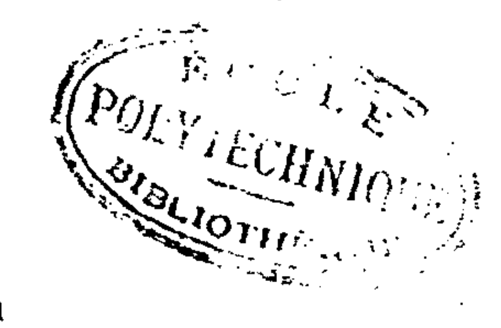
dont on connaît la forme en chaque point (x, y, z) et à chaque instant t, si l'on connaît la nature du fluide soumis à ces actions et la nature, l'état, la forme, la disposition des corps étrangers.

Si, dans ces quatre fonctions, que nous supposons continues ainsi que leurs dérivées partielles de tous les ordres, on remplace R par $\rho(x, y, z, t)$, on obtient quatre nouvelles fonctions

$$X_e(x, y, z, t), \quad Y_e(x, y, z, t), \quad Z_e(x, y, z, t), \quad A_e(x, y, z, t).$$

Cela posé, nous admettrons que le travail externe est de la forme

$$(70) \qquad d\mathfrak{T}_e = \int (P_x\, \delta x + P_y\, \delta y + P_z\, \delta z)\, dS + \int (X_e\, \delta x + Y_e\, \delta y + Z_e\, \delta z)\, dm,$$



P_x, P_y, P_z étant trois quantités qui varient d'une manière continue d'un point à l'autre de la surface S.

La première intégrale s'étend à la surface qui limite le fluide et la seconde à la masse fluide tout entière.

Nous devons maintenant écrire que l'égalité

$$(2) \qquad d\mathfrak{T}_e + d\mathfrak{T}_j + d\mathfrak{T}_v - \delta_T \mathcal{F} = 0$$

doit avoir lieu pour tout déplacement virtuel isothermique imposé au fluide.

Mais sans nouveau calcul, et en faisant usage de résultats connus, nous pouvons écrire les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi.

Considérons les égalités (3), (47), (48), (49); nous voyons sans peine qu'au lieu de l'égalité (2) on peut écrire l'égalité

$$(1) \qquad d\mathfrak{G}_e - \delta_T \mathfrak{F} = 0,$$

pourvu que, dans le calcul de $d\mathfrak{G}_e$, on remplace respectivement

$$P_x, \quad P_y, \quad P_z$$

par

$$(71) \qquad P_x + p_x, \quad P_y + p_y, \quad P_z + p_z$$

et

$$\rho X_e, \quad \rho Y_e, \quad \rho Z_e, \quad A_e$$

par

$$(72) \qquad \rho(X_e - \gamma_x) + q_x, \quad \rho(Y_e - \gamma_y) + q_y, \quad \rho(Z_e - \gamma_z) + q_z, \quad A_e.$$

Or l'équation (1) est l'équation fondamentale de l'équilibre des fluides. On peut donc dire que *les équations de l'Hydrostatique doivent être vérifiées si, aux actions extérieures, on substitue les actions* (71) *et* (72).

Dès lors, en nous appuyant sur des résultats connus (¹), nous pouvons énoncer les propositions suivantes :

Il existe une fonction $\Pi(x, y, z, t)$ *qui est finie, continue et uniforme dans toute la masse fluide, et qui n'est jamais négative*

$$(73) \qquad \Pi(x, y, z, t) \geqq 0,$$

telle que l'on ait :

1° *En tous les points de la masse fluide :*

$$(74) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \Pi}{\partial x} - \rho(X_i + X_e - \gamma_x) - q_x = 0, \\ &\frac{\partial \Pi}{\partial y} - \rho(Y_i + Y_e - \gamma_y) - q_y = 0, \\ &\frac{\partial \Pi}{\partial z} - \rho(Z_i + Z_e - \gamma_z) - q_z = 0; \end{aligned} \right.$$

$$(75) \qquad \Pi + \rho^2(A_i + A_e) - \rho^2 \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} = 0;$$

(¹) *Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique*, égalités (81), (82), (83) (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3ᵉ série, t. X, p. 223; 1893).

2° *En tout point de la surface qui limite le fluide*

$$(76)\quad \begin{cases} \Pi\cos(n_i, x) = P_x + p_x, \\ \Pi\cos(n_i, y) = P_y + p_y, \\ \Pi\cos(n_i, z) = P_z + p_z. \end{cases}$$

Arrêtons-nous un instant à ces égalités (76).

Supposons que, par une surface Σ, nous coupions le fluide en deux parties A et B; gardant la partie A, enlevons la partie B, qui faisait obstacle au mouvement de la précédente; en chaque point de la partie A, les quantités X_i, Y_i, Z_i, A_i se trouveront, en général, diminuées; au moyen de corps extérieurs convenables *et non contigus à la partie* A, faisons croître X_e, Y_e, Z_e, A_e de quantités respectivement égales à celles dont ont décru X_i, Y_i, Z_i, A_i; les sommes $(X_i + X_e)$, $(Y_i + Y_e)$, $(Z_i + Z_e)$, $(A_i + A_e)$ auront ainsi même valeur avant et après l'ablation de la partie B; pour que le mouvement de la partie A reste le même avant et après cette ablation, il sera nécessaire et suffisant d'appliquer à chaque élément $d\Sigma$ de la surface Σ une force dont les composantes

$$P_x\,d\Sigma, \quad P_y\,d\Sigma, \quad P_z\,d\Sigma$$

seront, en vertu des égalités (76) et (48), données par les égalités

$$(77)\quad \begin{cases} P_x = (\Pi + \nu_x)\cos(n_i, x) + \tau_z\cos(n_i, y) + \tau_y\cos(n_i, z), \\ P_y = \tau_z\cos(n_i, x) + (\Pi + \nu_y)\cos(n_i, y) + \tau_x\cos(n_i, z), \\ P_z = \tau_y\cos(n_i, x) + \tau_x\cos(n_i, y) + (\Pi + \nu_z)\cos(n_i, z), \end{cases}$$

où n_i est la normale à l'élément $d\Sigma$ vers l'intérieur de la partie A.

Pour les diverses surfaces Σ que l'on peut faire passer par un point du fluide, la pression P_x, P_y, P_z varie en grandeur et direction avec la normale n_i; la loi de cette variation, établie par Cauchy et par Lamé, est étudiée dans tous les traités d'Élasticité.

Cette pression joue ici le rôle de *pression de liaison* qui, dans les fluides en équilibre, est dévolue à la grandeur Π. Mais, chose remarquable, *ce n'est pas la pression de liaison* P_x, P_y, P_z, *mais la grandeur* Π *qui figure dans l'équation de compressibilité et de dilatation du fluide* (75). Cette proposition semblerait paradoxale si elle n'était établie par les méthodes générales et rigoureuses de l'Énergétique.

§ 5. — Les équations du mouvement mises sous la forme d'Euler et de Navier. — Nécessité d'une relation supplémentaire.

Reprenons les équations indéfinies (74).

Les expressions de q_x, q_y, q_z sont données par les égalités (58). D'autre part, on sait que l'on a

$$(78)\quad \begin{cases} \gamma_x = \dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z}, \\ \gamma_y = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z}, \\ \gamma_z = \dfrac{dw}{dt} = \dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z}. \end{cases}$$

Les équations (74) se transforment alors en trois équations dont la première est

$$(79)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Pi}{\partial x} - \rho(X_i + X_e) + \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \qquad - [\lambda(\rho, T) + \mu(\rho, T)]\dfrac{\partial \theta}{\partial x} - \mu(\rho, T)\Delta u - \theta\left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial \rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + \dfrac{\partial \lambda}{\partial T}\dfrac{\partial T}{\partial x}\right) \\ \qquad - \left[2\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\dfrac{\partial \rho}{\partial y} + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\dfrac{\partial \rho}{\partial z}\right]\dfrac{\partial \mu}{\partial \rho} \\ \qquad - \left[2\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial T}{\partial x} + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\dfrac{\partial T}{\partial y} + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\dfrac{\partial T}{\partial z}\right]\dfrac{\partial \mu}{\partial T} = 0. \end{cases}$$

Les deux autres ont des formes analogues.

A ces équations il faut joindre l'équation en termes finis

$$(75)\quad \Pi + \rho^2(A_i + A_e) - \rho^2\frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} = 0$$

et l'*équation de continuité*

$$(60)\quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0.$$

Ces relations diverses ne suffisent pas à mettre en équations même les problèmes les plus simples sur les mouvements des fluides.

Supposons, en effet, que les diverses parties du fluide n'exercent les unes sur les autres aucune action, de telle sorte que l'on ait

$$X_i = 0, \quad Y_i = 0, \quad Z_i = 0, \quad A_i = 0,$$

et supposons, en outre, que les fonctions X_e, Y_e, Z_e, A_e soient exprimées expli-

citement en fonctions de x, y, z, t. Les équations (60), (75), (79) forment un groupe de cinq équations entre les six fonctions inconnues

$$u, \quad v, \quad w, \quad \rho, \quad \Pi, \quad T.$$

Une de ces équations, l'équation (75), est une relation en termes finis; une autre, l'équation (60), est une équation aux dérivées partielles du premier ordre; enfin les trois équations (79) sont des équations aux dérivées partielles du second ordre. La mise en équations ne sera complète que si, aux relations fournies par l'Énergétique, on joint une *relation supplémentaire* empruntée à d'autres considérations.

L'établissement de cette relation exige l'étude de la quantité de chaleur dégagée, en une modification réelle ou virtuelle, par chaque élément du fluide.

§ 6. — Quantité de chaleur dégagée par chacun des éléments du fluide.

Considérons un système indépendant des corps extérieurs et ayant, en tous ses points, la même température T; soit S son entropie; en une modification réelle ou virtuelle quelconque, il dégage une quantité de chaleur dQ et l'on a ([1])

$$\text{(80)} \qquad E\,dQ = -ET\,\delta S - d\mathfrak{T}_\nu,$$

E étant l'équivalent mécanique de la chaleur.

Si le système, au lieu d'être indépendant des corps extérieurs, présente avec eux des *liaisons bilatérales* qui sont des *soudures*, la quantité de chaleur qu'il dégage dans une modification réelle ou virtuelle n'est plus une grandeur définie; on peut alors regarder l'égalité (80) comme donnant la *définition* de cette grandeur.

C'est cette égalité que nous allons appliquer à chacun des éléments de volume $d\varpi$, de masse $dm = \rho\, d\varpi$, en lesquels un fluide peut être décomposé.

Nous avons, dans ce cas ([2]),

$$\text{(81)} \qquad ES = -\frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T}\,dm$$

et, aussi selon l'égalité (41),

$$d\mathfrak{T}_\nu = d\tau_\nu\, d\varpi.$$

([1]) *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques*, Ire Partie, Chap. I, § 5, égalité (24) (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 5e série, t. II, 1896).

([2]) *Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique*, égalité (50) (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. X, p. 213; 1893).

L'égalité (80) devient donc

$$(82)\qquad \mathrm{E}\,d\mathrm{Q} = \mathrm{T}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial\mathrm{T}}\delta\rho + \frac{\partial^2\zeta}{\partial\mathrm{T}^2}\delta\mathrm{T}\right)dm - d\tau_v\, d$$

Si l'on observe d'ailleurs que, selon une formule connue,

$$\delta\rho = -\rho\left(\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right),$$

et si l'on fait usage de l'expression de $d\tau_v$ donnée par l'égalité (45), on voit que l'égalité (82) peut s'écrire :

$$(83)\qquad d\mathrm{Q} = -\left[c\,d\mathrm{T} + \alpha_x\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \alpha_y\frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \alpha_z\frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right.$$
$$\left. + \beta_x\left(\frac{\partial\,\delta y}{\partial z} + \frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right) + \beta_y\left(\frac{\partial\,\delta z}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta x}{\partial z}\right) + \beta_z\left(\frac{\partial\,\delta x}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta y}{\partial x}\right)\right]dm$$

avec

$$(84)\qquad \left\{\begin{aligned} c &= -\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{E}}\frac{\partial^2\zeta(\rho,\mathrm{T})}{\partial\mathrm{T}^2},\\ \alpha_x &= \frac{1}{\mathrm{E}}\left[\mathrm{T}\rho\frac{\partial^2\zeta(\rho,\mathrm{T})}{\partial\rho\,\partial\mathrm{T}} + \frac{\nu_x}{\rho}\right],\\ \alpha_y &= \frac{1}{\mathrm{E}}\left[\mathrm{T}\rho\frac{\partial^2\zeta(\rho,\mathrm{T})}{\partial\rho\,\partial\mathrm{T}} + \frac{\nu_y}{\rho}\right],\\ \alpha_z &= \frac{1}{\mathrm{E}}\left[\mathrm{T}\rho\frac{\partial^2\zeta(\rho,\mathrm{T})}{\partial\rho\,\partial\mathrm{T}} + \frac{\nu_z}{\rho}\right],\\ \beta_x &= \frac{1}{\mathrm{E}}\frac{\tau_x}{\rho},\qquad \beta_y = \frac{1}{\mathrm{E}}\frac{\tau_y}{\rho},\qquad \beta_z = \frac{1}{\mathrm{E}}\frac{\tau_z}{\rho}.\end{aligned}\right.$$

Considérons, en particulier, le cas où la modification virtuelle considérée coïncide avec la modification réelle subie par le système dans le temps dt. Si nous posons

$$(85)\qquad \sigma(\rho,\mathrm{T}) = -\frac{1}{\mathrm{E}}\frac{\partial\zeta(\rho,\mathrm{T})}{\partial\mathrm{T}},$$

$\sigma\,dm$ sera l'entropie de l'élément dm à l'instant t; désignons par $\left(\sigma + \frac{d\sigma}{dt}dt\right)$ la valeur de cette même fonction, à l'instant $(t + dt)$, pour le même élément matériel. Selon les égalités (53) et (85), l'égalité (80) deviendra, pour la modification réelle accomplie dans le temps dt,

$$(86)\qquad \mathrm{E}\,d\mathrm{Q} = -\left(\mathrm{E}\mathrm{T}\frac{d\sigma}{dt}dm - 2\,\mathfrak{D}\,d\varpi\right)dt.$$

G. Kirchhoff a donné [1] une expression semblable de dQ; mais, faute d'être fondés sur des principes énergétiques rigoureux, les raisonnements par lesquels il a tenté de la justifier ne valent point; ils ont été révoqués en doute par M. C. Neumann dans un travail dont il sera fait mention au paragraphe suivant.

La quantité $\mathfrak{D}$ ne peut jamais être négative. L'égalité (86) nous donne donc

$$dQ + T\frac{d\sigma}{dt}dm\,dt \geqq 0, \tag{87}$$

le signe d'égalité étant réservé au cas où la modification éprouvée pendant le temps dt par l'élément dm n'entraîne aucun travail de viscosité.

Écrivons des égalités analogues pour toutes les masses élémentaires qui composent le fluide et faisons-en la somme.

La somme des quantités dQ sera, selon une démonstration donnée dans notre Cours sur l'Énergétique professé à la Faculté des Sciences de Bordeaux en 1898-1899, la quantité de chaleur $d\mathfrak{Q}$ que le système tout entier dégage pendant le temps dt. Nous aurons donc

$$d\mathfrak{Q} + dt\int T\frac{d\sigma}{dt}dm \geqq 0, \tag{88}$$

le signe d'égalité étant réservé au cas où, dans le fluide, les actions de viscosité n'effectuent aucun travail pendant le temps dt.

Si nous divisons par T les deux membres de l'inégalité (87), nous trouvons

$$\frac{dQ}{T} + \frac{d\sigma}{dt}dm\,dt \geqq 0.$$

Pour tous les éléments du fluide, écrivons des inégalités analogues et faisons-en la somme. Remarquons que

$$\int\frac{d\sigma}{dt}dm = \frac{d}{dt}\int\sigma\,dm$$

et que $S = \int\sigma\,dm$ est l'entropie totale du fluide. Nous aurons

$$\sum\frac{dQ}{T} + \frac{dS}{dt}dt \geqq 0, \tag{89}$$

le signe d'égalité étant réservé au même cas que dans (88).

Les inégalités (88) et (89) fournissent une double extension au mouvement d'un fluide de la célèbre inégalité de Clausius.

---

[1] G. Kirchhoff, *Theorie der Wärme*, p. 118.

L'égalité (86) peut s'écrire plus explicitement. On a

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{1}{E}\frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial T^2}\frac{dT}{dt} + \frac{\partial^2 \xi(\rho, T)}{\partial\rho\,\partial T}\frac{d\rho}{dt},$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x}u + \frac{\partial T}{\partial y}v + \frac{\partial T}{\partial z}w$$

et, selon l'égalité (59),

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

D'ailleurs, $\mathfrak{D}$ est donné par la formule (54). On a donc

$$(90)\quad \begin{aligned} E\,dQ = \Bigg\{ & T\rho\frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}u + \frac{\partial T}{\partial y}v + \frac{\partial T}{\partial z}w + \frac{\partial T}{\partial t}\right) \\ & - T\rho^2\frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial\rho\,\partial T}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ & + \lambda(\rho, T)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \\ & + 2\mu(\rho, T)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]\Bigg\}\,d\varpi\,dt. \end{aligned}$$

§ 7. — Établissement de la relation supplémentaire.

Toutes les fois qu'une doctrine indépendante de l'Énergétique nous fournira une expression de la quantité de chaleur dQ dégagée, pendant le temps dt, par chacun des éléments $d\varpi$ du fluide, en égalant cette expression à la précédente, nous obtiendrons la relation supplémentaire cherchée.

Supposons, par exemple, que, d'une partie à l'autre du fluide, la chaleur se transmette exclusivement par conductibilité et point par rayonnement; que cette transmission par conductibilité se fasse selon la théorie de Fourier; enfin que le coefficient de conductibilité, fonction de ρ et de T, soit désigné par $k(\rho, T)$.

Au moyen d'une surface fermée Σ, isolons une partie A du fluide; soit n_i la normale à la surface Σ, dirigée vers l'intérieur de la partie A. L'hypothèse précédente revient à dire que, dans le temps dt, la partie A du fluide dégage une quantité de chaleur

$$(91)\qquad d\mathfrak{Q} = -\,dt\int k(\rho, T)\frac{\partial T}{\partial n_i}\,d\Sigma.$$

Faisons maintenant cette RESTRICTION ESSENTIELLE : *En tous les points de la partie* A *du fluide, les quantités*

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

existent et sont finies.

L'égalité (91) pourra alors se transformer et s'écrire

$$(92) \qquad d\mathfrak{Q} = -dt \int_A \left[k(\rho, T)\Delta T + \left(\frac{\partial k}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}\right)\frac{\partial T}{\partial x} + \left(\frac{\partial k}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial k}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial y}\right)\frac{\partial T}{\partial y} + \left(\frac{\partial k}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial k}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z}\right)\frac{\partial T}{\partial z}\right] d\varpi.$$

Cette égalité (92) demeure vraie, quelque petite que soit la partie A. On voit donc que la quantité de chaleur réellement dégagée, dans le temps dt, par l'élément $d\varpi$ a pour valeur

$$(93) \qquad dQ = -\left[k(\rho, T)\Delta T + \left(\frac{\partial k}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}\right)\frac{\partial T}{\partial x} + \left(\frac{\partial k}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial k}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial y}\right)\frac{\partial T}{\partial y} + \left(\frac{\partial k}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial k}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z}\right)\frac{\partial T}{\partial z}\right] d\varpi\, dt.$$

En égalant les deux expressions (90) et (93) de dQ, nous trouvons la relation

$$(94) \qquad \begin{aligned} & k(\rho, T)\Delta T + \frac{\partial k}{\partial T}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2\right] \\ & + \frac{\partial k}{\partial \rho}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) \\ & + \frac{T}{E}\rho\frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}u + \frac{\partial T}{\partial y}v + \frac{\partial T}{\partial z}w + \frac{\partial T}{\partial t}\right) \\ & - \frac{T}{E}\rho^2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\,\partial T}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ & + \frac{\lambda(\rho, T)}{E}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \\ & + \frac{2\mu(\rho, T)}{E}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] = 0. \end{aligned}$$

C'est la relation supplémentaire cherchée.

Cette relation a été donnée par G. Kirchhoff [1]; mais, comme nous l'avons indiqué au paragraphe précédent, elle n'est point rattachée par lui à une définition précise de la quantité de chaleur dégagée par chacune des parties d'un système doué de viscosité; aussi les raisonnements de G. Kirchhoff ont-ils paru peu convaincants pour M. C. Neumann [2], qui leur en a substitué d'autres. Il est parvenu ainsi à une relation supplémentaire qui diffère de la précédente par l'absence des termes en $\lambda(\rho, T)$, $\mu(\rho, T)$; selon M. C. Neumann, la relation supplémentaire serait la même, que le fluide soit ou non visqueux.

La relation (94) offre divers cas particuliers qu'il est intéressant de considérer.

Supposons d'abord le *fluide très conducteur*; $k(\rho, T)$ a une très grande valeur; la relation (94) se réduit alors à ce que l'on obtient en supprimant les termes qui ne renferment pas un facteur k ou ses dérivées partielles; elle peut se mettre sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k(\rho, T)\frac{\partial T}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[k(\rho, T)\frac{\partial T}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[k(\rho, T)\frac{\partial T}{\partial z}\right] = 0,$$

qui exprime la proposition suivante :

A chaque instant, la température affecte, en la masse fluide, la distribution qui conviendrait au régime thermique permanent si l'on figeait le fluide dans l'état qu'il présente à cet instant.

En particulier, si la température est la même en tous les points de la surface S qui limite le fluide, elle est aussi la même en tous les points du fluide.

Supposons, au contraire, *que le fluide soit très mauvais conducteur :*

$$(95) \qquad k(\rho, T) = 0.$$

L'égalité (94) se réduit à ce que l'on obtient en égalant à zéro l'expression de dQ donnée par l'égalité (90); elle nous enseigne que *la modification réelle éprouvée par chacun des éléments de la masse fluide est une modification adiabatique.*

Supposons, enfin, *que le fluide soit, à la fois, non conducteur et non visqueux;* à l'égalité (95) nous devrons joindre les égalités

$$(96) \qquad \lambda(\rho, T) = 0, \qquad \mu(\rho, T) = 0.$$

---

(1) G. Kirchhoff, *Theorie der Wärme*, p. 118.

(2) C. Neumann, *Berichte der Sachsischen Gesellschaft zu Leipzig*, 8 janvier 1894.

La condition (94) pourra se mettre sous la forme

$$(97) \qquad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2}\frac{dT}{\partial t} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}\frac{d\rho}{dt} = 0$$

ou bien, selon (85),

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0.$$

La modification réelle éprouvée par chacun des éléments de la masse fluide est isentropique.

§ 8. — Des fluides incompressibles.

Les équations du mouvement (74), (75), (76) s'obtiennent, comme on sait, en imposant au fluide une modification virtuelle dans laquelle la température de chaque élément demeure invariable.

Pour obtenir les équations (74) et (76), on suppose que la densité de chacun de ces éléments est, en même temps, invariable, ce qui ne souffre pas de difficulté; mais, pour obtenir l'égalité (75), on est obligé de faire varier la densité des divers éléments, tout en maintenant leur température invariable.

Par conséquent, *pour qu'il soit permis d'écrire l'équation* (75), *il faut que l'opération qui consiste à faire varier la densité des divers éléments fluides en laissant constante la température de chacun d'eux ne soit pas contradictoire avec la définition même du système.*

Or, il est aisé de définir des fluides, de telle sorte que cette définition exclue la possibilité de la modification virtuelle considérée.

Cela aura lieu si l'on pose que *la densité du fluide est une fonction déterminée de la température*

$$(98) \qquad \rho = f(T),$$

cas auquel on dit que l'on a affaire à un *fluide incompressible, mais dilatable.*

Cela aura lieu plus particulièrement si l'on pose que *la densité du fluide est absolument invariable*

$$(99) \qquad \rho = \text{const.},$$

cas auquel *le fluide est dit incompressible et indilatable.*

Ce dernier cas est facile à traiter.

L'équation de continuité (60) se réduit à

$$(61) \qquad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Les équations (79) se réduisent à l'équation

$$(100)\quad \frac{\partial \Pi}{\partial x} - \rho(X_i + X_e) + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$
$$- \mu(T)\,\Delta u - \left[2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial T}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial T}{\partial z}\right]\frac{d\mu}{dT} = 0$$

et à deux équations analogues.

Enfin, la relation supplémentaire (94) devient, en tenant compte de (84),

$$(101)\quad k(T)\,\Delta T + \frac{dk}{dT}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2\right]$$
$$- \rho c(T)\left(\frac{\partial T}{\partial x}u + \frac{\partial T}{\partial y}v + \frac{\partial T}{\partial z}w + \frac{\partial T}{\partial t}\right)$$
$$+ \frac{2\mu(T)}{E}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] = 0.$$

Cinq équations lient les cinq fonctions inconnues

$$u, \quad v, \quad w, \quad \Pi, \quad T.$$

L'étude des fluides incompressibles, mais dilatables, donne lieu à une remarque essentielle.

Plusieurs des propositions, empruntées à l'Énergétique, dont nous avons fait usage jusqu'ici, supposent que le système est rapporté à des variables normales ou que ses modifications sont définies par des variations normales. Or *un fluide incompressible, mais dilatable, ne peut être défini au moyen de variables normales; ses modifications ne peuvent être représentées par des variations normales.*

Quelles que soient, en effet, les variations δa, δb, ..., δl, que l'on associe à δT pour représenter une modification élémentaire de l'un des éléments du fluide, si l'on fait

$$\delta a = 0, \quad \delta b = 0, \quad \ldots, \quad \delta l = 0,$$

tout en donnant à δT une valeur différente de zéro, la densité ρ de l'élément éprouvera une variation; les divers éléments matériels qui composent le fluide se déplaceront donc dans une telle modification, ce qui est incompatible avec la définition des variations normales.

Il faudrait donc, pour traiter rigoureusement des fluides incompressibles, mais dilatables, reprendre sur nouveaux frais bon nombre de questions de Mécanique

des fluides, en particulier l'étude de la viscosité; nous ne pensons pas que l'objet poursuivi vaille un tel effort.

On pourrait se proposer de traiter, ce qui peut se faire au moyen des principes contenus dans les paragraphes précédents, des *fluides dilatables et très peu compressibles*; en d'autres termes, on supposerait que *l'égalité*

$$(98) \qquad \rho = f(T)$$

est vérifiée non pas rigoureusement, mais *approximativement*.

Dans ce cas, rien ne s'opposerait plus à ce que nous écrivions les égalités (74) [ou (79)], (75), (76) et (94). Mais, comme la relation (75), différentiée, donne

$$d[\Pi + \rho^2(A_i + A_e)] = \left(2\rho\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} + \rho^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2}\right)d\rho + \rho^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}dT,$$

tandis que l'égalité (98) donne sensiblement

$$d\rho - f'(T)\,dT = 0,$$

on voit que les deux quantités

$$2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} + \rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2}, \quad \rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}$$

devraient être deux quantités très grandes et que la relation

$$(102) \qquad \frac{\rho\dfrac{\partial^2\zeta(\rho,T)}{\partial\rho\,\partial T}}{2\dfrac{\partial\zeta(\rho,T)}{\partial\rho} + \rho\dfrac{\partial^2\zeta(\rho,T)}{\partial\rho^2}} = -f'(T)$$

devrait être sensiblement vérifiée lorsqu'on y remplace ρ par $f(T)$.

Plusieurs des dérivées partielles du premier ou du second ordre de $\zeta(\rho, T)$ étant extrêmement grandes, il en serait de même, en général, de $\zeta(\rho, T)$ et de $\frac{\partial\zeta(\rho,T)}{\partial\rho}$; il en résulte, en particulier, que l'équation (75) ne pourrait être généralement vérifiée pour des valeurs finies de Π. Cette conséquence nous montre l'impossibilité de traiter, en Thermodynamique, de fluides très peu compressibles et notablement dilatables.

Nous allons retrouver par ailleurs la même conclusion.

La relation

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \rho\theta = -\frac{d\rho}{dt}$$

peut s'écrire sensiblement, en vertu de l'égalité (98),

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = -f'(T)\frac{dT}{dt} = -f'(T)\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x}u + \frac{\partial T}{\partial y}v + \frac{\partial T}{\partial z}w\right),$$

en sorte qu'au second membre de l'égalité (90) les deux premiers termes peuvent s'écrire

$$\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{E}}\rho\left[\frac{\partial^2\zeta(\rho,\mathrm{T})}{\partial\mathrm{T}^2}+\frac{\partial^2\zeta(\rho,\mathrm{T})}{\partial\rho\,\partial\mathrm{T}}f'(\mathrm{T})\right]\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}+\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial x}u+\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial y}v+\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial z}w\right)d\varpi\,dt.$$

Désignons par $\gamma(\mathrm{T})$ ce que devient la somme

$$(103) \qquad -\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{E}}\left[\frac{\partial^2\zeta(\rho,\mathrm{T})}{\partial\mathrm{T}^2}+\frac{\partial^2\zeta(\rho,\mathrm{T})}{\partial\rho\,\partial\mathrm{T}}f'(\mathrm{T})\right],$$

lorsqu'on y remplace ρ par $f(\mathrm{T})$, et l'égalité (90) deviendra

$$(104)\quad d\mathrm{Q}=-\left\{\begin{aligned}&\gamma(\mathrm{T})\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}+\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial x}u+\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial y}v+\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial z}w\right)\\&-\overline{f'(\mathrm{T})}^2\frac{\mathfrak{L}(\mathrm{T})}{\mathrm{E}\overline{f(\mathrm{T})}^3}\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}+\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial x}u+\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial y}v+\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial z}w\right)^2\\&-\frac{2\mathfrak{M}(\mathrm{T})}{\mathrm{E}f(\mathrm{T})}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right.\\&\left.+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]\end{aligned}\right\}dm\,dt,$$

$\mathfrak{L}(\mathrm{T})$, $\mathfrak{M}(\mathrm{T})$ étant ce que deviennent $\lambda(\rho,\mathrm{T})$, $\mu(\rho,\mathrm{T})$ lorsqu'on y remplace ρ par $f(\mathrm{T})$.

Cette formule nous donne l'interprétation de la quantité $\gamma(\mathrm{T})$.

Si l'on supposait le fluide non visqueux, en sorte que l'on eût

$$\mathfrak{L}(\mathrm{T})=0, \qquad \mathfrak{M}(\mathrm{T})=0,$$

elle deviendrait

$$(105)\quad d\mathrm{Q}=-\gamma(\mathrm{T})\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}+\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial x}u+\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial y}v+\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial z}w\right)dm\,dt=-\gamma(\mathrm{T})\frac{d\mathrm{T}}{dt}dm\,dt.$$

$\gamma(\mathrm{T})$ *représente donc ce que serait la chaleur spécifique du fluide s'il cessait d'être visqueux.*

On peut dire encore que $\gamma(\mathrm{T})$ *représente la chaleur spécifique du fluide échauffé avec une lenteur infinie de telle façon qu'à chaque instant, il soit sensiblement immobile.*

Pour un semblable échauffement, en effet,

$$\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}, \quad u, \quad v, \quad w$$

sont des quantités infiniment petites du premier ordre; il en est de même des

dérivées partielles de u, v, w. Dès lors, si l'on néglige les infiniment petits du second ordre, l'égalité (104) prend la forme (105).

Or, comme $\frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial \rho \, \partial T}$ doit avoir, pour les fluides que nous étudions, une valeur extrêmement grande, il en serait de même, en général, en vertu de la formule (103), de la chaleur spécifique $\gamma(T)$.

On peut démontrer très rigoureusement qu'il en est bien ainsi dans un cas particulier extrêmement étendu et défini de la manière suivante :

1° Les actions étudiées sont *newtoniennes*, en sorte que

$$(106) \qquad \mathrm{A}_i + \mathrm{A}_e = 0.$$

2° La densité du fluide très peu compressible varie dans le même sens que la pression Π, la température étant maintenue constante. Cette loi est d'ailleurs une des conditions pour que le fluide puisse se trouver en équilibre stable sous l'action d'une pression uniformément répartie à la surface qui le limite ([1]).

En vertu des égalités (75) et (106), cette condition s'exprime par l'inégalité

$$2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial \rho^2} > 0$$

que l'égalité (102) transforme en

$$\frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial \rho \, \partial T} f'(T) < 0.$$

3° La chaleur spécifique normale c est essentiellement positive.

Cette proposition est un cas particulier d'une des hypothèses fondamentales de la Thermodynamique, que nous avons nommée *Postulat de Helmholtz*.

En vertu de la première égalité (84), cette condition s'exprime par l'inégalité

$$\frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial T^2} < 0.$$

Les deux termes qui composent $\gamma(T)$ sont donc positifs; l'un d'eux étant extrêmement grand, $\gamma(T)$ est, à coup sûr, extrêmement grand.

On ne peut donc traiter le cas d'un fluide dilatable, mais infiniment peu compressible, comme un cas limite de l'étude thermodynamique des fluides compressibles suivant une loi quelconque; certaines des grandeurs physiques que l'on aurait à considérer deviennent infinies dans ce cas.

([1]) *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants*, Chap. I, § V (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. I, p. 131; 1895).

L'entropie de la masse élémentaire dm est $\sigma(\rho, T)\, dm$. Si nous voulons qu'elle devienne identiquement une fonction de la température seule, il faut que nous ayons ou bien $\rho = \text{const.}$, ou bien $\rho = f(T)$; mais, dans ce dernier cas, l'état du fluide ne saurait être défini par des variables normales; nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Pour qu'en un fluide, défini par des variables normales, l'entropie soit IDENTIQUEMENT *fonction de la température seule, il faut et il suffit que le fluide soit incompressible et indilatable.*

Considérons un tel fluide, et supposons, en outre, qu'il ne soit pas visqueux

$$\lambda = 0, \qquad \mu = 0.$$

La température T disparaît des équations (100), qui prennent la forme

$$(107) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \Pi}{\partial x} - \rho(X_i + X_e) + \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{array} \right.$$

Les quatre relations (107) et (61) lient les quatre fonctions inconnues

$$u, \quad v, \quad w, \quad \Pi.$$

Elles suffisent donc à mettre en équations le problème du mouvement du fluide sans qu'on ait à se soucier des variations de la température.

Une fois le mouvement du fluide déterminé, la condition supplémentaire (101) servira à étudier les variations de la température.

Nous obtenons ainsi une *extension au cas d'un fluide continu* d'un théorème que nous avons établi autrefois [1] pour les systèmes qui dépendent d'un nombre limité de variables :

Lorsqu'un système, défini par des variables normales et exempt de viscosité, a une entropie qui, IDENTIQUEMENT, *dépend de la température seule, les principes de l'Énergétique suffisent à mettre en équations le problème du mouvement de ce système; mais ils laissent indéterminée la variation de la température sur ce système; pour étudier cette variation, il faut faire appel à des principes autres que ceux de l'Énergétique.*

---

[1] *Sur l'équation des forces vives en Thermodynamique et les relations de la Thermodynamique avec la Mécanique classique* (*Procès-verbaux* de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 23 décembre 1897). — *L'intégrale des forces vives en Thermodynamique* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. IV, p. 5; 1898).

CHAPITRE II.

L'ÉQUATION DES FORCES VIVES (1).

§ 1. — Divers cas où il existe une intégrale des forces vives. Forme de cette intégrale.

L'égalité (2) est certainement vérifiée en toute modification réelle ou virtuelle du fluide; dans le présent Chapitre, nous nous proposons d'étudier particulièrement la forme que prend cette égalité lorsqu'on l'applique à une modification réelle. Toutefois nous subordonnerons cette étude à une condition restrictive : *nous admettrons que les actions extérieures dérivent d'un potentiel.* En d'autres termes, nous supposerons qu'il existe une fonction Ω_e, dépendant uniquement de l'état du système, et telle que l'on ait, en toute modification réelle ou virtuelle,

$$d\mathfrak{T}_e = -\delta\Omega_e. \tag{108}$$

On suppose le système rapporté à des variables normales, en sorte qu'aucun travail externe n'est effectué lorsque l'on fait seulement varier la température de chaque élément; il en résulte que Ω_e doit être indépendant de la température des divers éléments qui composent le fluide.

D'ailleurs, d'après ce que nous avons vu au Chapitre I, § 8, l'hypothèse, formulée en ce moment, et à laquelle nous nous tiendrons, que le système est rapporté à des variables normales, nous oblige à rejeter hors de notre étude le cas des fluides incompressibles, mais dilatables.

Dans une transformation réelle, nous avons

$$d\mathfrak{T}_v = -2\mathfrak{f}\,dt. \tag{55}$$

Nous avons aussi

$$d\mathfrak{T}_j = -dt\int(\gamma_x u + \gamma_y v + \gamma_z w)\,dm = -dt\int\left(u\frac{du}{dt} + v\frac{dv}{dt} + w\frac{dw}{dt}\right)dm$$

ou, enfin,

$$d\mathfrak{T}_j = -d\int\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\,dm, \tag{109}$$

$\int\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\,dm$ étant la *force vive* du fluide.

(1) *Sur la condition supplémentaire en Hydrodynamique* (*Comptes rendus*, t. CXXXII, p. 117, 21 janvier 1901).

Considérons l'expression de $\mathfrak{F}$ donnée par l'égalité (66). Nous voyons immédiatement que nous pouvons écrire

$$\delta\mathfrak{F} = \delta_T\mathfrak{F} + \int \frac{\partial\zeta(\rho, T)}{\partial T}\,\delta T\,dm$$

ou, selon l'égalité (85),

(110) $$\delta_T\mathfrak{F} = \delta\mathfrak{F} + E\int \sigma(\rho, T)\,\delta T\,dm.$$

On voit, dès lors, que, *dans toute modification réelle élémentaire de la masse fluide, on peut écrire*

(111) $$d\left(\Omega_e + \mathfrak{F} + \int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}\,dm\right) - E\,dt\int \sigma(\rho, T)\,\frac{dT}{dt}\,dm = -\,2\mathfrak{f}\,dt.$$

Nous allons nous proposer de chercher dans quelles conditions le premier membre de l'égalité (111) devient l'accroissement subi, pendant le temps dt, par une grandeur qui dépend uniquement de l'état et du mouvement du système; ce qui revient au même, nous allons chercher dans quelles conditions

(112) $$\Sigma = dt\int \sigma(\rho, T)\,\frac{dT}{dt}\,dm$$

présente le même caractère.

1° *Fluides incompressibles et indilatables.* — La grandeur Σ peut tout d'abord présenter ce caractère identiquement et quel que soit le mouvement du système; c'est ce qui a lieu toutes les fois que

$$\sigma(\rho, T)\,dT$$

est une différentielle totale.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que ρ soit identiquement une fonction de T; mais, comme nous devons rejeter de notre étude le cas des fluides incompressibles et dilatables, le caractère dont nous venons de parler ne peut se présenter que *si le fluide est incompressible et indilatable,* cas auquel ρ est une constante.

Dans ce cas, si l'on se reporte à l'expression (85) de $\sigma(\rho, T)$, on peut écrire

(113) $$\frac{dt}{E}\int \sigma(\rho, T)\,\frac{dT}{dt}\,dm = d\zeta(\rho, T).$$

En vertu des égalités (66) et (113), l'égalité (111) peut s'écrire

(114) $$d\left(\Phi + \int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}\,dm\right) = -\,2\mathfrak{f}\,dt,$$

Φ ayant la signification suivante :

$$\Phi = \Omega_e + \tfrac{1}{2}\int\int\psi(\rho, \rho', r)\,dm\,\partial m'. \tag{115}$$

Φ est, dans le cas des fluides incompressibles et indilatables, la somme du potentiel externe et du potentiel des actions que les divers éléments fluides exercent les uns sur les autres.

Si le fluide n'est pas visqueux, $\mathcal{F}$ est nul, et la relation (114) nous donne l'*intégrale des forces vives :*

$$\Phi + \int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}\,dm = \text{const.} \tag{116}$$

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Toutes les fois qu'un fluide non visqueux est défini par des variables normales et que l'entropie $\sigma\,dm$ de chaque élément dm est, identiquement, fonction de la température seule, il existe, en tout mouvement du fluide, une intégrale des forces vives, et la fonction Φ qui y figure est la somme du potentiel externe et du potentiel des actions mutuelles des divers éléments fluides.

Ce théorème est l'extension à une masse fluide d'une proposition démontrée ailleurs (¹) pour un système qui dépend d'un nombre limité de paramètres variables.

2° *Fluide compressible animé d'un mouvement isothermique.* — La quantité

$$\Sigma = dt\int \sigma(\rho, T)\,\frac{dT}{dt}\,dm \tag{112}$$

peut n'être pas identiquement l'accroissement subi pendant le temps dt par une fonction de l'état du système et se transformer en un tel accroissement lorsqu'on fait usage de la condition supplémentaire; c'est ce qui a lieu en particulier lorsque la condition supplémentaire exige que, *dans son mouvement, chaque masse élémentaire du fluide garde une température invariable qui, d'ail-*

(¹) *Sur l'équation des forces vives en Thermodynamique et les relations de la Thermodynamique avec la Mécanique classique* (*Procès-verbaux de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 23 décembre 1897). — *L'intégrale des forces vives en Thermodynamique* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5ᵉ série, t. IV, p. 5; 1898). — *Voir* aussi E. Jouguet, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5ᵉ série, t. XVII, p. 235; 1901.

leurs, peut n'être pas la même pour les divers éléments du fluide; dans ce cas, le mouvement du fluide est dit *isothermique.*

Dans un mouvement isothermique on a

$$\frac{dT}{dt}=0.$$

L'égalité (111) fournit donc la relation (114), et, si le fluide est dénué de viscosité, l'intégrale des forces vives (116), pourvu que l'on donne à Φ la signification suivante :

$$\Phi=\Omega_e+\tfrac{1}{2}\int\int\psi(\rho,\rho',r)\,dm\,dm'+\int\zeta(\rho,T)\,dm. \tag{117}$$

3° *L'entropie est, en vertu de la condition supplémentaire, fonction de la température seule.* — Hors ce cas, pour que la quantité

$$\Sigma=dt\int\sigma(\rho,T)\frac{dT}{dt}dm$$

devienne, en vertu de la condition supplémentaire, l'accroissement qu'éprouve, dans le temps dt, une fonction de l'état du système, il faut et il suffit que $\sigma\,dt$ devienne, en vertu de la condition supplémentaire, une différentielle totale; ou, en d'autres termes, que la condition supplémentaire entraîne cette conséquence : *σ est, pour chaque élément matériel, une fonction de la seule température de cet élément,*

$$\sigma=s(T), \tag{118}$$

CETTE FONCTION POUVANT D'AILLEURS DIFFÉRER D'UN ÉLÉMENT A L'AUTRE.

Si nous posons alors

$$\int s(T)\,dT=S(T), \tag{119}$$

nous pourrons écrire l'égalité (114) et, si le fluide n'est pas visqueux, l'intégrale des forces vives (116), en donnant à Φ la signification suivante :

$$\Phi=\Omega_e+\tfrac{1}{2}\int\int\psi(\rho,\rho',r)\,dm\,dm'+\int[\zeta(\rho,T)+E\,S(T)]\,dm. \tag{120}$$

4° *Fluide compressible animé d'un mouvement isotropique.* — Dans le cas que nous venons de traiter est impliqué un cas particulier intéressant : c'est celui où, *durant le mouvement du fluide, la grandeur σ garde, pour chaque élément, une valeur constante*

$$\sigma(\rho,T)=\sigma_0, \tag{121}$$

CETTE VALEUR POUVANT D'AILLEURS N'ÊTRE PAS LA MÊME POUR LES DIVERS ÉLÉMENTS DU FLUIDE; le mouvement du fluide est dit alors *isentropique*.

Nous avons vu au Chapitre I, § 7, que tout mouvement d'un fluide dénué de viscosité et de conductibilité était un mouvement isentropique.

Pour un tel mouvement, la fonction $\mathcal{S}(T)$, définie par l'égalité (119), se réduit à Ts_0; en vertu de l'égalité (121), elle est constamment égale à $T\sigma(\rho, T)$ ou encore, en vertu de l'égalité (85), à $-\frac{T}{E}\frac{\partial\zeta(\rho, T)}{\partial T}$.

On a donc les trois égalités

$$\mathcal{S}(T) = T\sigma_0, \tag{122}$$

$$\mathcal{S}(T) = T\sigma(\rho, T), \tag{123}$$

$$\mathcal{S}(T) = -\frac{T}{E}\frac{\partial\zeta(\rho, T)}{\partial T}. \tag{124}$$

On peut donc, dans le cas d'un mouvement isentropique, écrire l'égalité (114); si le fluide n'est pas visqueux, on peut écrire l'intégrale des forces vives (116); dans les deux cas, la fonction Φ doit être, selon les égalités (120) et (124), définie comme suit :

$$\Phi = \Omega_e + \tfrac{1}{2}\int\int\psi(\rho, \rho', r)\,dm\,dm' + \int\left[\zeta(\rho, T) - T\frac{\partial\zeta(\rho, T)}{\partial T}\right]dm. \tag{125}$$

On remarquera que

$$\int\left[\zeta(\rho, T) - T\frac{\partial\zeta(\rho, T)}{\partial T}\right]dm + \tfrac{1}{2}\int\int\psi(\rho, \rho', r)\,dm\,dm'$$

est (¹) le produit par l'équivalent mécanique de la chaleur E de l'énergie interne du fluide.

§ 2. — Du rôle de la fonction Φ en Hydrostatique.

Considérons une des fonctions Φ et le fluide auquel elle se rapporte. Nous allons établir la proposition suivante :

Pour obtenir les conditions d'équilibre d'un fluide auquel correspond une certaine fonction Φ, il suffit d'écrire que l'on a

$$\delta\Phi = 0 \tag{126}$$

(¹) *Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3ᵉ série, t. X, p. 214; 1893).

pour toutes les modifications virtuelles qui sont soumises aux mêmes conditions que les modifications réelles pour lesquelles l'égalité (114) est valable.

Nous savons que, pour obtenir les conditions d'équilibre d'un fluide quelconque, il est nécessaire et suffisant d'écrire que l'on a

$$(1) \qquad d\mathcal{T}_e - \delta_T \mathcal{F} = 0$$

pour toutes les modifications isothermiques virtuelles qui ne contredisent pas à la définition du fluide. Il s'agit donc d'établir, pour chacun des cas que nous avons distingués au paragraphe précédent, l'équivalence des égalités (1) et (126).

1° *Fluides incompressibles et indilatables.* — Pour un tel fluide, la densité de chaque élément demeure invariable en toute modification virtuelle; donc, en toute modification isothermique virtuelle, $\zeta(\rho, T)\, dm$ demeure invariable. Dès lors, en vertu des égalités (66) et (108), la condition (1) peut s'énoncer ainsi :

On a

$$\delta\left[\Omega_e + \frac{1}{2}\int\int \psi(\rho, \rho', r)\, dm\, dm'\right] = 0$$

pour toute modification isothermique virtuelle qui laisse invariable la densité de chaque élément fluide. Mais rien, dans la quantité entre [ ], ne dépend de la température; on peut donc effacer de cet énoncé le mot *isothermique*. Si l'on se reporte alors à l'égalité (115), on voit que l'énoncé précédent équivaut à celui-ci :

La condition (126) est vérifiée par toutes les modifications virtuelles qui laissent inaltérée la densité de chaque élément.

2° *Fluides dont les mouvements sont isothermiques.* — Dans ce cas, si l'on tient compte des égalités (66), (108) et (117), la condition (1) devient

$$(127) \qquad \delta_T \Phi = 0.$$

Elle équivaut donc à celle-ci : La condition (126) est vérifiée en toute modification virtuelle isothermique.

3° *Fluides dont chaque élément a une entropie fonction de la température seule, en vertu de la condition supplémentaire.* — La condition supplémentaire est telle que l'on ait, en tout mouvement réel,

$$(118) \qquad \sigma(\rho, T) = s(T),$$

la fonction $s(T)$ pouvant différer d'un élément à l'autre. Pour obtenir une modification virtuelle en laquelle cette condition demeure constamment vérifiée, on peut prendre pour $\delta\rho$, en chaque élément, une valeur arbitraire et lui associer une

valeur de δT telle que

$$(128) \qquad \frac{\partial \sigma(\rho, T)}{\partial \rho} \delta\rho + \left[\frac{\partial \sigma(\rho, T)}{\partial T} - \frac{ds(T)}{dT}\right] \delta T = 0.$$

Considérons une modification virtuelle quelconque en laquelle la condition (121) est et demeure vérifiée; en cette modification, $\delta\rho$ est quelconque et δT est lié à $\delta\rho$ par la relation (128); supposons que, pour toute modification de ce genre, on ait la condition

$$(126) \qquad \delta\Phi = 0,$$

Φ étant donné, dans ce cas, par l'égalité (120).

Si l'on tient compte de l'égalité (119), cette condition peut s'écrire

$$\delta\left[\Omega_e + \tfrac{1}{2}\int\int \psi(\rho, \rho', r)\, dm\, dm'\right] + \int\left\{\frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T}\delta\rho + \left[\frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T} - E s(T)\right]\delta T\right\} dm = 0.$$

Mais, si l'on tient compte des égalités (121) et (85), on a

$$\frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} - E s(T) = \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T} - E\sigma(\rho, T) = 0$$

et la condition précédente se réduit à celle-ci :

$$\delta\left[\Omega_e + \tfrac{1}{2}\int\int \psi(\rho, \rho', r)\, dm\, dm'\right] + \int \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho}\delta\rho\, dm = 0,$$

où δT ne figure plus, en sorte qu'il n'est plus nécessaire de mentionner que δT est lié à $\delta\rho$ par la condition (128).

Cette condition est précisément la condition (1).

5° *Fluides dont les mouvements sont isentropiques en vertu de la relation supplémentaire.* — Ce cas est un cas particulier du précédent; il est donc inutile de donner à son sujet une démonstration nouvelle. La démonstration précédente suffit à prouver que, pour trouver les conditions d'équilibre d'un fluide, on peut, au lieu d'écrire la condition (1), exprimer que toute modification virtuelle où l'entropie de chaque élément garde une valeur invariable satisfait à la condition (126), Φ ayant la forme (125).

Le théorème énoncé est ainsi démontré pour tous les cas.

§ 3. — De la stabilité de l'équilibre.

Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant :

Considérons un fluide pour lequel on puisse écrire l'équation (114) *et, s'il y a lieu, restreignons ses mouvements possibles à ceux pour lesquels l'emploi de cette équation est légitime. Si, dans un état déterminé de ce fluide, la fonction* Φ *est minimum, cet état est un état d'équilibre stable.*

La démonstration que nous allons donner est imitée d'une démonstration bien connue de Lejeune-Dirichlet; quelques modifications, cependant, ont dû être introduites, parce qu'il ne s'agit pas ici d'un système défini par un nombre limité de variables indépendantes.

Soient deux états o et 1 du fluide étudié; soit $d\varpi$ un élément de volume qui renferme du fluide, soit dans l'état o, soit dans l'état 1, soit à la fois dans les deux états; le fluide y a, dans l'état o, la densité ρ_0 et la température T_0; dans l'état 1, il a la densité ρ_1 et la température T_1; l'une des densités ρ_0, ρ_1 peut être égale à o, si, dans l'un des états o ou 1, l'élément $d\varpi$ est vide; dans ce cas, nous conviendrons également d'attribuer à la température la valeur o.

Formons les deux quantités

$$(129)\qquad \left\{\begin{aligned} R &= \int |\rho_1 - \rho_0|\, d\varpi, \\ \Theta &= \int |T_1 - T_0|\, d\varpi, \end{aligned}\right.$$

où les intégrations s'étendent aux régions de l'espace qui renferment du fluide au moins dans l'un des deux états o et 1.

Examinons les propriétés de ces deux quantités.

Pour que la quantité R soit nulle, il faut et il suffit que le fluide occupe la même partie de l'espace dans l'état o et dans l'état 1, et que chaque élément de cet espace soit, dans les deux états, rempli par un fluide de même densité. Hors ce cas, R a une valeur positive qui est finie si, dans une région finie de l'espace, ρ_1 diffère de ρ_0 d'une quantité finie. R est ce que nous nommerons l'*écart en densité* entre les états o et 1.

Lorsque le système se composera de plusieurs fluides de nature distincte, pour former l'écart en densité relatif au système entier, nous calculerons l'écart en densité de chacun des fluides, et nous en ferons la somme.

Au sujet de la quantité Θ, nous pouvons répéter tout ce que nous avons dit au sujet de la quantité R, en remplaçant simplement le mot *densité* par le mot *température*. Θ est l'*écart en température* entre les états o et 1.

Les deux égalités

$$(130) \qquad R = 0, \quad \Theta = 0$$

suffisent à assurer l'identité des états 0 et 1.

Si les divers mouvements du fluide sont nécessairement isothermiques, la première égalité suffit à cet objet; dans ce cas, il est inutile d'écrire la seconde, et, dans les raisonnements qui vont suivre, on pourra biffer tout ce qui concerne la quantité Θ.

Si le fluide est incompressible, mais dilatable, la seconde égalité (130) suffit à assurer l'identité des états 0 et 1; dans ce cas, il est inutile d'écrire la première ni, dans ce qui va suivre, de mentionner la grandeur R.

Cela posé, nous nous proposons d'une manière précise de démontrer la proposition suivante :

Supposons que, dans un certain état α, Φ ait une valeur minimum. Supposons qu'à chaque instant R *et* Θ *désignent les écarts du système par rapport à cet état α. On pourra toujours trouver trois grandeurs positives a_0, b_0, c_0, telles que si, à l'instant t_0, on a*

$$(131) \qquad R_0 \leqq a_0, \quad \Theta_0 \leqq b_0, \quad \int \frac{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2}{2}\, dm \leqq c_0,$$

on soit assuré d'avoir, à tout instant t, postérieur à t_0,

$$(132) \qquad R < a, \quad \Theta < b, \quad \int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}\, dm \leqq c,$$

a, b, c étant trois quantités positives données d'avance.

La fonction Φ n'est jamais déterminée qu'à une constante additive près. On peut toujours choisir cette constante de telle sorte que, dans l'état α, on ait $\Phi = 0$. Φ étant en même temps minimum, on pourra toujours fixer deux grandeurs positives A et B, telles que Φ soit positif toutes les fois que l'on a

$$R \leqq A, \quad \Theta \leqq B,$$

sauf dans le cas où les égalités (130) sont simultanément vérifiées, cas auquel Φ est nul.

On peut toujours assujettir a_0, b_0 à être pris respectivement inférieurs à A et à B; on est alors assuré que la valeur Φ_0, prise par Φ à l'instant t_0, est positive.

D'autre part, on peut supposer que les deux limites assignées a, b sont, respectivement, au plus égales à A, B. Si, en effet, l'une d'elles, a, par exemple, surpassait la limite correspondante A, R, variant d'une manière continue, ne pourrait passer de la valeur a_0, inférieure à A, à la valeur a sans franchir la valeur A;

il suffirait donc, dans ce cas, pour que R ne puisse atteindre a, qu'elle ne puisse atteindre A; c'est-à-dire qu'on pourrait substituer A à a dans l'énoncé précédent.

Considérons tous les états du système pour lesquels on a, ou bien

$$R = a, \quad \Theta \leqq b$$

ou bien

$$R \leqq a, \quad \Theta = b.$$

Nommons ces états les *états e*.

L'énoncé même suppose que les grandeurs a_0, b_0 sont respectivement inférieures à a, b; dès lors, à aucun instant t, postérieur à t_0, l'une des inégalités

$$(132 \textit{ bis}) \qquad R < a, \quad \Theta < b,$$

ne peut cesser d'être vérifiée, à moins que le système ne passe à cet instant par un état e, ou n'y ait passé à un instant compris entre t et t_0.

Pour chaque état e, Φ a une valeur positive; on ne peut d'ailleurs, parmi ces états e, former une suite qui ait pour limite l'état α; on ne peut donc, parmi les valeurs correspondantes de Φ, former une suite qui ait pour limite 0; l'ensemble des valeurs de Φ qui correspondent aux états e admet donc une limite inférieure positive P.

Prenons le système à un instant quelconque t, postérieur à t_0. A cet instant nous pouvons écrire, en vertu de l'égalité (114),

$$\Phi - \Phi_0 + \int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}\, dm - \int \frac{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2}{2}\, dm = -2\int_{t_0}^{t} \mathfrak{F}\, dt.$$

$\mathfrak{F}$ ne pouvant être positif ou nul, cette relation peut s'écrire

$$(133) \qquad \Phi + \int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}\, dm \leqq \Phi_0 + \int \frac{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2}{2}\, dm.$$

Soit Q la plus petite des deux quantités P et c; nous pouvons prendre

$$c_0 < \frac{Q}{2}.$$

D'ailleurs, comme Φ tend vers 0 lorsque R et Θ tendent vers 0, nous pouvons choisir a_0, b_0, de telle sorte que les deux premières égalités (131) entraînent

$$\Phi_0 < \frac{Q}{2}.$$

Moyennant ce choix de a_0, b_0, c_0, le second membre de la relation (133) est infé-

rieur à Q

$$\Phi + \int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} dm < Q. \tag{134}$$

Q est au plus égal à P; d'autre part, $\int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} dm$ ne peut être négatif. L'inégalité (134) nous donne alors

$$\Phi < P.$$

Donc à aucun instant t, postérieur à t_0, le système ne peut passer par un état e, en sorte qu'à tout instant t, postérieur à t_0, les deux premières inégalités (132) demeurent vérifiées.

De cette première conclusion découle qu'à aucun instant t, postérieur à t_0, Φ ne peut devenir négatif; dès lors, comme Q est au plus égal à c, l'inégalité (134) donne

$$\int \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} dm < c,$$

ce qui est la dernière inégalité (132).

Le théorème énoncé est donc démontré.

§ 4. — Stabilité isothermique et stabilité isentropique (1).

Selon le théorème démontré au paragraphe précédent, un fluide incompressible et indilatable est en équilibre stable, pour tous les déplacements possibles, dans un état où la fonction Φ, donnée par l'égalité (115), a une valeur minimum.

Un fluide compressible, assujetti à n'éprouver que des déplacements qui n'altèrent pas la température de ses divers éléments, est en équilibre stable dans un état où la fonction Φ, définie par l'égalité (117), a une valeur minimum parmi celles qu'elle peut prendre sans changement de température des diverses masses élémentaires.

Si, dorénavant, nous désignons par Φ_T la fonction Φ que représente l'égalité (117), et par δ_T une variation prise sans changement de température des diverses masses élémentaires, les conditions qui suffisent à assurer la *stabilité isothermique de l'équilibre* sont

$$\delta_T \Phi_T = 0, \tag{135}$$

$$\delta_T^2 \Phi_T > 0. \tag{136}$$

---

(1) *Sur la stabilité isentropique d'un fluide* (*Comptes rendus*, t. CXXXII, p. 244; 5 février 1901).

Un fluide compressible, assujetti à n'éprouver que des déplacements en lesquels l'entropie de chaque masse élémentaire varie selon la loi

$$(118) \qquad \sigma(\rho, T) = s(T),$$

est en équilibre stable dans un état donné si, en cet état, la fonction Φ, définie par l'égalité (120), a une valeur minimum parmi toutes celles qu'elle peut prendre en des variations soumises à la loi (118).

Désignons par δ_s une telle variation, en laquelle on a, pour chaque élément,

$$(128) \qquad \frac{\partial \sigma(\rho, T)}{\partial \rho} \delta\rho + \left[\frac{\partial \sigma(\rho, T)}{\partial T} - \frac{d s(T)}{dT} \right] \delta T = 0,$$

et par Φ_s la fonction Φ que définit l'égalité (120). Les conditions qui suffisent à assurer la *stabilité de l'équilibre relativement à la loi* $\sigma = s(T)$ sont

$$(137) \qquad \delta_s \Phi_s = 0,$$

$$(138) \qquad \delta_s^2 \Phi_s > 0.$$

Proposons-nous de comparer, pour un même fluide, ces deux sortes de stabilité d'équilibre.

Les démonstrations données au 3° et au 4° du § 2 nous prouvent que si, dans une variation δ_s, on regarde $\delta\rho$ comme une variation arbitraire et δT comme lié à $\delta\rho$ par la relation (128), on a

$$(139) \qquad \delta_s \Phi_s = \delta_T \Phi_T,$$

en sorte que les conditions (135) et (137) sont identiques.

En outre, cette égalité (139) nous permet d'écrire

$$(140) \quad \delta_s^2 \Phi_s = \delta_s \delta_T \Phi_T = \delta^2 \left[\Omega_e + \tfrac{1}{2} \int\int \psi(\rho, \rho', r)\, dm\, dm' \right] + \delta_s \int \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} \delta\rho\, dm.$$

Mais, visiblement,

$$\begin{aligned} \delta_s \int \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} \delta\rho\, dm &= \int \frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial \rho^2} (\delta\rho)^2\, dm + \int \frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial \rho\, \partial T} \delta\rho\, \delta T\, dm \\ &= \delta_T \int \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} \delta\rho\, dm + \int \frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial \rho\, \partial T} \delta\rho\, \delta T\, dm, \end{aligned}$$

δT étant, pour chaque élément, lié à $\delta\rho$ par la relation (128).

L'égalité (140) devient alors

$$\delta_s^2 \Phi_s = \delta_T^2 \Phi_T + \int \frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial \rho\, \partial T} \delta\rho\, \delta T\, dm$$

ou bien, en remplaçant δT par sa valeur tirée de l'égalité (128) et en tenant compte de l'identité

(85) $$\sigma(\rho, T) = -\frac{1}{E}\frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T},$$

$$\delta_s^2 \Phi_s = \delta_I^2 \Phi_I - \int \frac{\left[\frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial \rho\, \partial T}\right]^2}{\frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial T^2} + E\frac{ds(T)}{dT}} dm.$$

Si nous faisons usage de la première égalité (84)

$$c = -\frac{T}{E}\frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial T^2},$$

l'égalité précédente devient

(141) $$\delta_s^2 \Phi_s = \delta_I^2 \Phi_I + \frac{1}{E}\int \frac{T\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}\right)^2}{c - T\frac{ds}{dT}} dm.$$

En vertu d'une hypothèse générale de la Thermodynamique, que nous avons nommée (¹) *Postulat de Helmholtz*, c est essentiellement positif. Donc *toutes les fois que l'entropie de chaque élément demeure invariable, ou bien est une fonction décroissante de la température, ou bien encore croît avec la température, mais assez lentement pour que l'on ait*

$$\frac{ds(T)}{dT} < \frac{c}{T},$$

on a

$$\delta_s^2 \Phi_s \geq \delta_I^2 \Phi_I,$$

en sorte que la condition (136) entraîne la condition (138); *les conditions qui assurent la stabilité isothermique de l'équilibre assurent aussi la stabilité lorsque l'entropie de chaque élément dépend de la température seule.*

En particulier, *les conditions qui suffisent à assurer la stabilité isothermique d'un état d'équilibre assurent la stabilité isentropique du même état d'équilibre.*

Nous obtenons ainsi l'extension à une masse fluide continue (²) d'un théorème

(¹) *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, 3ᵉ Partie, Chap. IV (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4ᵉ série, t. X, p. 273; 1894). — *Traité élémentaire de Mécanique chimique*, t. I, p. 164; 1897.

(²) *Comptes rendus*, t. CXXXII, p. 244; 5 février 1901.

déjà démontré (¹) pour les systèmes qui dépendent d'un nombre limité de paramètres variables.

§ 5. — Réciproque du critérium de stabilité. — Conséquences de ce critérium.

Pour qu'un système, sous les conditions indiquées, soit en équilibre stable dans un certain état, il suffit que cet état corresponde, sous les mêmes conditions, à un minimum de Φ; cette condition suffisante est-elle en même temps nécessaire? On n'a pu le démontrer jusqu'ici; toutefois, cette proposition peut être regardée comme très vraisemblable. A l'avenir, *nous en admettrons l'exactitude.*

Ce serait ici le lieu, si nous nous proposions de donner une exposition complète de la Dynamique des fluides, de traiter des conséquences diverses du critérium que nous venons d'obtenir. Pour l'exposé de ces conséquences, nous renverrons le lecteur aux divers écrits que nous avons publiés à ce sujet (²).

CHAPITRE III.

FORME HABITUELLE DES ÉQUATIONS DE L'HYDRODYNAMIQUE (³).

§ 1. — Nature des actions extérieures qui seront considérées en ce Chapitre.

Nous allons reprendre, pour les transformer, les équations de l'Hydrodynamique données en (79). Mais pour effectuer cette transformation, nous ferons

(¹) *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, 3ᵉ Partie, Chap. IV (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4ᵉ série, t. X, p. 274; 1894). — *Traité élémentaire de Mécanique chimique*, t. I, p. 165; 1897.

(²) *Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique;* Cours autographié de la Faculté des Sciences de Lille, Livre II, Chap. II, t. I, p. 80; 1891. — *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5ᵉ série, t. I, p. 91; 1895). — *Sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles* (*Ibid.*, 5ᵉ série, t. III, p. 151; 1897).

(³) *Sur la condition supplémentaire en Hydrodynamique* (*Comptes rendus*, t. CXXXII, p. 117; 21 janvier 1901). — *Cf.* E. Jouguet, *Le théorème des tourbillons en Thermodynamique* (*Comptes rendus*, t. CXXXI, p. 1190; 24 décembre 1900. — *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5ᵉ série, t. XIII, p. 235; 1901).

une supposition qui particularisera quelque peu la nature des actions extérieures auxquelles le fluide est soumis.

Nous admettrons qu'il existe une fonction $U(x, y, z, \rho, t)$, déterminée en chaque point (x, y, z) du fluide et à chaque instant t, telle que l'on ait

$$(142) \qquad X_e = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y_e = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z_e = -\frac{\partial U}{\partial z}, \qquad A_e = -\frac{\partial U}{\partial \rho}.$$

Cette fonction U existe, en particulier, si l'on suppose que les actions exercées par les corps extérieurs sur les divers éléments de la masse fluide sont analogues aux actions que les divers éléments de la masse fluide exercent les uns sur les autres.

Soient, en effet,

dM un élément de masse appartenant aux corps extérieurs;
Δ la densité de l'élément dM;
R la distance des deux éléments dM, dm;
$\chi(\rho, \Delta, R)$ une fonction analogue à $\psi(\rho, \rho', r)$.

Dans l'hypothèse énoncée, nous aurons les formules, analogues aux quatre dernières formules (67),

$$(143) \qquad \begin{cases} X_e = -\int \dfrac{\partial \chi(\rho, \Delta, R)}{\partial R} \dfrac{\partial R}{\partial x} dM, \\ Y_e = -\int \dfrac{\partial \chi(\rho, \Delta, R)}{\partial R} \dfrac{\partial R}{\partial y} dM, \\ Z_e = -\int \dfrac{\partial \chi(\rho, \Delta, R)}{\partial R} \dfrac{\partial R}{\partial z} dM, \\ A_e = -\int \dfrac{\partial \chi(\rho, \Delta, R)}{\partial \rho} dM, \end{cases}$$

les intégrations s'étendant à tous les corps étrangers.

Posons

$$(144) \qquad U = \int \chi(\rho, \Delta, R)\, dM.$$

Si l'on suppose la position et l'état des corps étrangers connus à chaque instant t, Δ devient une fonction de t, R une fonction de x, y, z, t, χ une fonction de x, y, z, ρ, t, et il en est de même de U. Il est clair, par les égalités (143) et (144), que cette fonction vérifie les égalités (142).

Considérons le travail élémentaire $d\mathfrak{T}'_e$ des actions X_e, Y_e, Z_e, A_e s'exerçant

sur toute la masse fluide. Ce travail a pour expression

$$d\mathfrak{E}'_e = \int (X_e \delta x + Y_e \delta y + Z_e \delta z + A_e \delta \rho)\, dm$$

ou bien, en vertu des égalités (142),

(145) $$d\mathfrak{E}'_e = -\int \left(\frac{\partial U}{\partial x} \delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \delta z + \frac{\partial U}{\partial \rho} \delta \rho \right) dm.$$

Si la fonction U *ne dépend pas explicitement du temps* t et si l'on pose

(146) $$\Omega'_e = \int U\, dm,$$

l'égalité (145) devient

(147) $$d\mathfrak{E}'_e = -\delta \Omega'_e.$$

Le travail des actions X_e, Y_e, Z_e, A_e *dépend d'un potentiel, qui est la fonction* Ω'_e, *donnée par l'égalité* (146).

Dans ce cas, pour que le travail des actions extérieures dérive d'un potentiel Ω_e, il est nécessaire et suffisant que le travail des pressions appliquées à la surface du fluide

$$d\mathfrak{E}''_e = \int (P_x \delta x + P_y \delta y + P_z \delta z)\, dS$$

dérive aussi d'un potentiel Ω''_e; on aura alors

$$\Omega_e = \Omega'_e + \Omega''_e.$$

Le cas dont nous venons de parler se présente lorsque les actions X_e, Y_e, Z_e, A_e sont de la forme (143) et que les corps étrangers dont elles émanent sont invariables de forme, de position et d'état. Dans ce cas, en effet, Δ est une constante et R une fonction de x, y, z. La fonction U, donnée par l'égalité (144), est une simple fonction des variables ρ, x, y, z.

§ 2. — Transformation des équations de l'Hydrodynamique.

Revenons au cas général où $U(x, y, z, \rho, t)$ peut dépendre explicitement de t. Dans cette fonction, remplaçons ρ par son expression en fonction de x, y, z, t; nous obtenons une fonction $V_e(x, y, z, t)$:

(148) $$V_e(x, y, z, t) = U[x, y, z, \rho(x, y, z, t), t].$$

L'égalité (148) nous donne, en particulier,

$$\frac{\partial V_e}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x},$$
$$\frac{\partial V_e}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y},$$
$$\frac{\partial V_e}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial z}$$

ou bien, en vertu des égalités (142),

$$(149)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial V_e}{\partial x} + X_e + A_e\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0,\\ &\frac{\partial V_e}{\partial y} + Y_e + A_e\frac{\partial \rho}{\partial y} = 0,\\ &\frac{\partial V_e}{\partial z} + Z_e + A_e\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0.\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, la fonction $V_i(x, y, z, t)$, donnée par la première égalité (67), vérifie aussi les relations [1]

$$(150)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial V_i}{\partial x} + X_i + A_i\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0,\\ &\frac{\partial V_i}{\partial y} + Y_i + A_i\frac{\partial \rho}{\partial y} = 0,\\ &\frac{\partial V_i}{\partial z} + Z_i + A_i\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0.\end{aligned}\right.$$

Considérons la première des équations (74) :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Pi}{\partial x} - (X_i + X_e) + \gamma_x - \frac{q_x}{\rho} = 0.$$

Les égalités (149) et (150) permettent de l'écrire

$$(151)\qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Pi}{\partial x} + (A_i + A_e)\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(V_i + V_e) + \gamma_x - \frac{q_x}{\rho} = 0.$$

L'égalité

$$(75)\qquad \Pi + \rho^2(A_i + A_e) - \rho^2\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} = 0,$$

---

(1) *Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique*, équations (70) (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. X, p. 220; 1893).

vérifiée en tout point du fluide, donne

$$\frac{\partial H}{\partial x} + 2\rho(A_i + A_e)\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho^2 \frac{\partial}{\partial x}(A_i + A_e) - \rho \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\right) - \rho \frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

Mais

$$\frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\zeta(\rho, T) - \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}.$$

L'égalité précédente peut donc s'écrire

$$(152) \quad \begin{aligned} &\frac{1}{\rho}\frac{\partial H}{\partial x} + (A_i + A_e)\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x} \\ &\quad = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho(A_i + A_e) - \zeta(\rho, T) - \rho\frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho}\right]. \end{aligned}$$

Si donc nous posons

$$(153) \quad G(x, y, z, t) = V_i + V_e - \rho(A_i + A_e) + \zeta(\rho, T) + \rho\frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho},$$

les égalités (151) et (153) donneront la première des égalités

$$(154) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x} + \gamma_x - \frac{q_x}{\rho} = 0, \\ &\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial y} + \gamma_y - \frac{q_y}{\rho} = 0, \\ &\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_z - \frac{q_z}{\rho} = 0. \end{aligned} \right.$$

Les autres se démontrent d'une manière analogue.

Nous allons maintenant rechercher les divers cas où l'on peut trouver une fonction $H(x, y, z, t)$ telle que l'on ait

$$(155) \quad \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial z}.$$

Alors, en posant

$$(156) \quad A(x, y, z, t) = G(x, y, z, t) - H(x, y, z, t),$$

on mettra les égalités (154) sous la forme

$$(157)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Lambda}{\partial x} + \gamma_x - \dfrac{q_x}{\rho} = 0, \\ \dfrac{\partial \Lambda}{\partial y} + \gamma_y - \dfrac{q_y}{\rho} = 0, \\ \dfrac{\partial \Lambda}{\partial z} + \gamma_z - \dfrac{q_z}{\rho} = 0. \end{cases}$$

1° *Fluides incompressibles et indilatables.* — Cherchons d'abord si les égalités (155) peuvent avoir lieu identiquement, quelle que soit la nature de la condition supplémentaire imposée au fluide.

Il faut et il suffit pour cela que

$$(85)\qquad \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T} = -E\sigma(\rho, T)$$

soit identiquement une fonction de la température seule. Cela ne peut avoir lieu que dans deux cas :

1° Le cas où

$$(98)\qquad \rho = f(T).$$

C'est le cas des fluides incompressibles, mais dilatables, que nous ne pouvons étudier.

2° Le cas où

$$(99)\qquad \rho = \text{const.}$$

C'est le cas des fluides incompressibles et indilatables.

Mais, dans ce cas, le calcul que nous venons d'exposer n'est plus légitime, car nous n'avons plus le droit d'écrire l'égalité (75), ni, partant, l'égalité (152).

Toutefois, dans ce cas, l'égalité (151) reste légitime. D'autre part, comme le fluide incompressible et indilatable est supposé partout de même nature, ρ a, en tout point, la même valeur et l'on a, dans toute la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0.$$

Si donc nous posons

$$(158)\qquad \Lambda(x, y, z, t) = V_i + V_e + \frac{\Pi}{\rho},$$

l'égalité (151) devient la première des égalités (157); les deux autres égalités (157) se démontrent d'une manière analogue.

2° *Fluide compressible de température uniforme.* — Considérons maintenant le mouvement d'un fluide compressible et voyons si les conditions du mouvement peuvent être telles que les égalités (155) soient vérifiées.

Un premier cas où elles se trouveront vérifiées est celui où, *à chaque instant, la température aura même valeur en tous les points du fluide.* Dans ce cas, en effet, on aura

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0,$$

$$H(x, y, z, t) = 0$$

et, partant, selon (153) et (156),

$$(159) \qquad A(x, y, z, t) = V_i + V_e - \rho(A_i + A_e) + \zeta(\rho, T) + \rho \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho}.$$

Ce cas se présentera, d'après ce que nous avons vu au Chapitre I, § 7, si le fluide est très bon conducteur et si tous les points de la surface qui le limitent sont, à chaque instant, à une même température.

3° *En vertu de la condition supplémentaire, l'entropie est une fonction de la température seule, la même en tous les points du fluide.* — Hors le cas précédent, les égalités (155) ne peuvent avoir lieu que si, par suite de la condition supplémentaire, $\frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T}$ est, à chaque instant, une fonction de la seule variable T, *la même en tous les points du fluide.* En vertu de l'égalité (85), il revient au même de dire que *l'on a, à chaque instant t,*

$$(118) \qquad \sigma(\rho, T) = s(T),$$

la fonction s(T) pouvant changer de forme d'un instant à l'autre [$s = s(T, t)$], MAIS GARDANT LA MÊME FORME D'UN POINT A L'AUTRE DU FLUIDE.

Si l'on pose

$$(119) \qquad S(T) = \int s(T)\, dT,$$

les égalités (155) donneront

$$(160) \qquad H(x, y, z, t) = -E\, S(T)$$

et les égalités (153), (156) et (160) donneront

$$(161) \quad A(x, y, z, t) = V_i + V_e - \rho(A_i + A_e) + \zeta(\rho, T) + \rho \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} + E\, S(T).$$

4° *Mouvement à entropie uniforme.* — Un cas particulier intéressant est celui où la condition (118) se réduit à

$$(121) \qquad \sigma(\rho, T) = s_0,$$

s_0 *étant une grandeur qui peut changer d'un instant à l'autre* [$s_0 = s_0(t)$], MAIS QUI, AU MÊME INSTANT, A LA MÊME VALEUR EN TOUS LES POINTS DU FLUIDE.

Dans ce cas, $S(T)$ vérifie les égalités (122), (123), (124) et l'égalité (161) peut prendre les deux formes

$$(162) \quad A(x, y, z, t) = V_i + V_e - \rho(A_i + A_e) + \zeta(\rho, T) + \rho \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} + ETs_0,$$

$$(163) \quad A(x, y, z, t) = V_i + V_e - \rho(A_i + A_e) + \zeta(\rho, T) + \rho \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} - T\frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T}.$$

Dans le cas que nous examinons ici rentre celui-ci : *A partir d'un état initial où il a en tous points même densité* ρ_0 *et même température* T_0, *un fluide éprouve un mouvement isentropique.* Dans ce cas, en effet, s_0 est une constante absolue, indépendante à la fois de x, y, z et de t, et dont la valeur est $\sigma(\rho_0, T_0)$.

Mais il n'en est plus de même, en général, si, à l'instant initial t_0, le fluide a une densité et une température variables d'un point à l'autre, et si, à partir de ce moment, il éprouve un mouvement isentropique. Dans ce cas, il existera toujours une fonction $\Phi(x, y, z, t)$ permettant d'écrire l'équation (114), mais il n'existe plus, en général, de fonction $A(x, y, z, t)$ permettant d'écrire les équations (157).

Considérons, en effet, l'élément matériel dm, dont les coordonnées sont x, y, z, à l'instant t; à l'instant t_0, ses coordonnées avaient des valeurs a, b, c, déterminées lorsque l'on connaît x, y, z, t :

$$(164) \qquad \begin{cases} a = f(x, y, z, t), \\ b = g(x, y, z, t), \\ c = h(x, y, z, t). \end{cases}$$

A l'instant t_0, au point de coordonnées a, b, c, la température avait la valeur $T_0(a, b, c)$, la densité la valeur $\rho_0(a, b, c)$, la fonction $\sigma(\rho, T)$ la valeur

$$(165) \qquad \sigma[\rho_0(a, b, c), T_0(a, b, c)] = s_0(a, b, c).$$

Le mouvement étant isentropique, la fonction $\sigma(\rho, T)$ a la même valeur au

point (x, y, z), à l'instant t; on a donc

$$\sigma(\rho, T) = s_0(a, b, c)$$

ou, plus explicitement,

$$\sigma(\rho, T) = s_0[f(x, y, z, t),\ g(x, y, z, t),\ h(x, y, z, t)].$$

$\sigma(\rho, T)$ n'est donc pas, en général, indépendant de x, y, z.

Cette remarque, qui semble avoir communément passé inaperçue (¹), particularise extrêmement l'application des équations (157) aux mouvements isentropiques. Si l'on observe, d'ailleurs, que la démonstration (²) de la plupart des théorèmes *dits généraux* de l'Hydrodynamique suppose l'emploi des égalités (157), on voit combien est bornée l'étude des mouvements isentropiques des fluides.

D'ailleurs, si l'on cherche à définir et à classer les problèmes hydrodynamiques pour lesquels existent à la fois les deux fonctions $\Phi(x, y, z, t)$, $\Lambda(x, y, z, t)$ (c'est-à-dire les seuls problèmes auxquels on puisse appliquer la plupart des *théorèmes dits généraux* de l'Hydrodynamique), et *dont les conditions aient un sens physique*, on est frappé de l'étroitesse du champ qui demeure ouvert aux investigations.

Ces problèmes, en effet, se ramènent tous aux trois catégories que voici :

PREMIÈRE CATÉGORIE. — *Mouvements quelconques des fluides incompressibles et indilatables, visqueux ou non visqueux.*

C'est la plus anciennement et la plus complètement étudiée parmi les catégories de problèmes hydrodynamiques.

DEUXIÈME CATÉGORIE. — *Un fluide compressible, visqueux ou non visqueux, est parfaitement conducteur. La surface qui le limite est portée à une température invariable et uniforme.*

Dans ce cas, en effet, on a, dans toute la masse du fluide et à chaque instant,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial z} = 0,$$

ce qui assure l'existence des deux fonctions Φ et Λ.

(¹) *Sur la condition supplémentaire en Hydrodynamique* (*Comptes rendus*, t. CXXXII, p. 117; 21 janvier 1901).

(²) E. JOUGUET, *Le théorème des tourbillons en Thermodynamique* (*Comptes rendus*, t. CXXXI, p. 1190; 24 décembre 1900. — *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5ᵉ série, t. XIII, p. 235; 1901).

TROISIÈME CATÉGORIE. — *Les divers éléments d'un fluide compressible sont sans action les uns sur les autres; ce fluide est dénué de conductibilité et de viscosité; l'état initial de ce fluide est un état de température uniforme où il est maintenu en équilibre par des actions extérieures qui se réduisent aux pressions appliquées à sa surface.*

Dans ce cas, en effet, le fluide subit un mouvement isentropique à partir d'un état initial homogène.

Ce dernier problème est le problème du mouvement sonore au sein d'une masse gazeuse, tel que l'a posé Laplace.

DEUXIÈME PARTIE.

SUR LA PROPAGATION DES ONDES.

INTRODUCTION.

Dans une première Partie de ces Recherches [1], nous avons examiné les fondements sur lesquels repose la mise en équations du problème hydrodynamique. La question qui se pose maintenant est la suivante : *Les intégrales des équations de l'Hydrodynamique sont-elles continues et analytiques dans tout l'espace? Si, le long de certaines surfaces, elles cessent d'être continues ou d'être analytiques, quelles sont les propriétés de ces surfaces?* C'est à l'examen de ces questions qu'est consacré le présent écrit.

CHAPITRE I.

DES ONDES DE CHOC.

§ 1. — Considérations cinématiques.

Imaginons qu'à l'instant t, on puisse tracer dans le fluide une surface S jouissant des propriétés suivantes :

Soit M un point de la surface; soient 1 et 2 les deux côtés d'une aire entourant le point M, tracée sur la surface S, et assez petite pour être simplement connexe;

---

[1] *Recherches sur l'Hydrodynamique;* Ire Partie : *Sur les principes fondamentaux de l'Hydrodynamique* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. III, p. 315; 1901).

soient M_1 un point infiniment voisin du point M et situé du côté 1, et M_2 un point infiniment voisin du point M et situé du côté 2.

Lorsque le point M_1 tend vers le point M, la densité ρ et les composantes u, v, w de la vitesse en ce point tendent uniformément vers des limites ρ_1, u_1, v_1, w_1; lorsque le point M_2 tend vers le point M, la densité ρ et les composantes u, v, w de la vitesse en ce point tendent uniformément vers des limites ρ_2, u_2, v_2, w_2 respectivement différentes de ρ_1, u_1, v_1, w_1.

Nous supposerons, d'ailleurs, que les quantités ρ_1, u_1, v_1, w_1, ρ_2, u_2, v_2, w_2 varient d'une manière continue lorsque le point M se déplace sur la surface S.

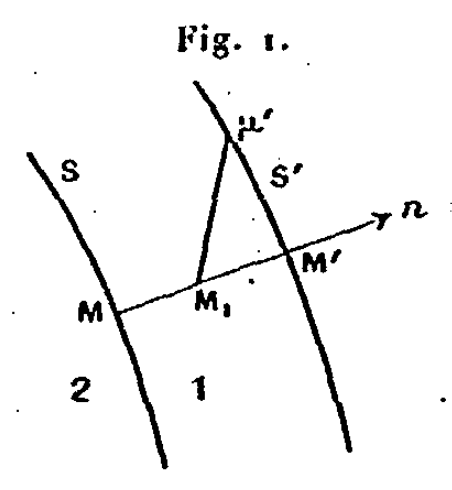
Il peut arriver qu'une telle surface S existe non pas seulement à l'instant isolé t, mais à tous les instants d'un certain laps de temps; dans ce cas, en général, la surface S ne demeurera pas fixe dans l'espace; elle se déformera et se déplacera d'une manière continue; occupant la position S à l'instant t, elle occupera la position voisine S' à l'instant $(t + dt)$.

Par le point M menons, à la surface S, une demi-normale dirigée du côté 1; ce sera dorénavant la *direction positive de la normale* à la surface S; nous la désignerons par n, et par α, β, γ nous désignerons les cosinus des angles qu'elle fait avec les axes de coordonnées Ox, Oy, Oz.

Une normale, menée en M à la surface S, rencontre la surface S' en un point M', voisin du point M. Nous désignerons par $\mathfrak{N}$ une grandeur dont la valeur absolue sera $\frac{\overline{MM'}}{dt}$, qui sera affectée du signe + si la direction MM' coïncide avec la direction n, et du signe — dans le cas contraire. Cette grandeur $\mathfrak{N}$ sera, au point M, la *vitesse de déplacement de la surface* S. En général, elle variera d'une manière continue d'un point à l'autre de la surface S.

Prenons un point matériel μ qui se trouve, à l'instant t, en un point M_1 (*fig.* 1),

Fig. 1.



voisin de la surface S et situé du côté 1 de cette surface. Peut-il se faire qu'à une époque voisine de t et postérieure à t, il se trouve du côté 2 par rapport à la position actuelle de la surface S?

Supposons qu'il en soit ainsi. Admettons que le point μ se trouve du côté 1 de la surface mobile jusqu'à l'instant $(t + dt)$ et du côté 2 à partir de cet instant; à l'instant $(t + dt)$, il se trouve précisément en μ', sur la surface S'.

Menons la normale à la surface S qui, issue du point M, passe au point M_1. La direction MM_1 coïncide, d'après les hypothèses faites, avec la direction positive n de cette normale.

Projetons la ligne brisée $MM_1\mu'$ sur la direction n et exprimons que la projection doit être, en grandeur et en signe, égale à $\mathfrak{N}\,dt$.

Si δ_1 est la longueur MM_1, la projection du segment MM_1 sur la direction n est précisément δ_1.

Entre les instants t et $(t+dt)$, le point matériel considéré est demeuré du côté 1 de la surface; les composantes de sa vitesse ont différé infiniment peu de u_1, v_1, w_1; aux infiniment petits d'ordre supérieur près, les composantes du segment $M_1\mu'$ ont pour composantes $u_1\,dt$, $v_1\,dt$, $w_1\,dt$ et sa projection sur la direction n est $(u_1\alpha+v_1\beta+w_1\gamma)\,dt$; on a donc

$$(1)\qquad \mathfrak{N}\,dt=\delta_1+(u_1\alpha+v_1\beta+w_1\gamma)\,dt$$

ou bien

$$(2)\qquad \delta_1=\mathfrak{V}_1\,dt,$$

avec

$$(3)\qquad \mathfrak{V}_1=\mathfrak{N}-(u_1\alpha+v_1\beta+w_1\gamma).$$

L'instant $(t+dt)$ étant postérieur à t, dt est positif; δ_1 étant positif par définition, la condition (2) exige que l'on ait

$$(4)\qquad \mathfrak{V}_1>0.$$

Ainsi, pour qu'un point matériel μ qui se trouvait du côté 1 de la surface S à l'instant t puisse être atteint par la surface S' à un instant postérieur $(t+dt)$, il faut et il suffit que la quantité $\mathfrak{V}_1$ soit positive; l'instant où il est atteint est déterminé par l'égalité (2).

Lorsqu'il en est ainsi, on dit que le mouvement $2(\rho_2, u_2, v_2, w_2)$ *se propage dans le mouvement* $1(\rho_1, u_1, v_1, w_1)$ *avec la vitesse* $\mathfrak{V}_1$.

Nous pouvons traiter de même la question suivante :

A l'instant t, un point matériel μ_2 se trouve du côté 2 de la surface S et à une distance normale δ_2 de cette surface; peut-il se faire qu'à l'instant $(t+dt)$ il soit atteint par la surface mobile S', et qu'il se trouve ensuite du côté 1 de cette surface?

Nous obtenons le résultat suivant :

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la quantité

$$(3\ bis)\qquad \mathfrak{V}_2=-\mathfrak{N}+u_2\alpha+v_2\beta+w_2\gamma$$

soit positive :

$$(4\ bis) \qquad \mathfrak{V}_1 > 0;$$

dt est alors déterminé par l'égalité

$$(2\ bis) \qquad \delta_2 = \mathfrak{V}_2\, dt.$$

Lorsqu'il en est ainsi, on dit que le mouvement 1 (ρ_1, u_1, v_1, w_1) *se propage dans le mouvement* 2 (ρ_2, u_2, v_2, w_2) *avec la vitesse de propagation* $\mathfrak{V}_2$.

Il est clair que les trois hypothèses suivantes épuisent toutes les suppositions possibles :

1° Les points matériels que la surface S' affecte à l'instant $(t + dt)$ étaient, à l'instant t, du côté 1 de la surface S; par conséquent, aucun point qui était, à l'instant t, du côté 2 de la surface S ne peut être, à l'instant $(t + dt)$, du côté 1 de la surface S'; on a donc

$$(5) \qquad \mathfrak{V}_1 > 0, \qquad \mathfrak{V}_2 \leqq 0.$$

C'est le *cas où le mouvement* 2 *se propage dans le mouvement* 1.

2° Les points matériels que la surface S' affecte à l'instant $(t + dt)$ étaient, à l'instant t, du côté 2 de la surface S; par conséquent, aucun point qui était, à l'instant t, du côté 1 de la surface S ne peut être, à l'instant $(t + dt)$, du côté 2 de la surface S'; on a donc

$$(5\ bis) \qquad \mathfrak{V}_2 > 0, \qquad \mathfrak{V}_1 \leqq 0.$$

C'est le *cas où le mouvement* 1 *se propage dans le mouvement* 2.

Dans ces deux cas on dit que *la surface* S *est une* ONDE DE CHOC.

3° Les points qui, à l'instant t, sont du côté 1 de la surface S sont aussi, à l'instant $(t + dt)$, du côté 1 de la surface S'; les points qui, à l'instant t, sont du côté 2 de la surface S sont aussi, à l'instant $(t + dt)$, du côté 2 de la surface S'.

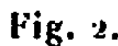
On dit alors que *la surface* S *est la* SURFACE DE GLISSEMENT *de deux couches fluides* 1 *et* 2 *l'une sur l'autre.*

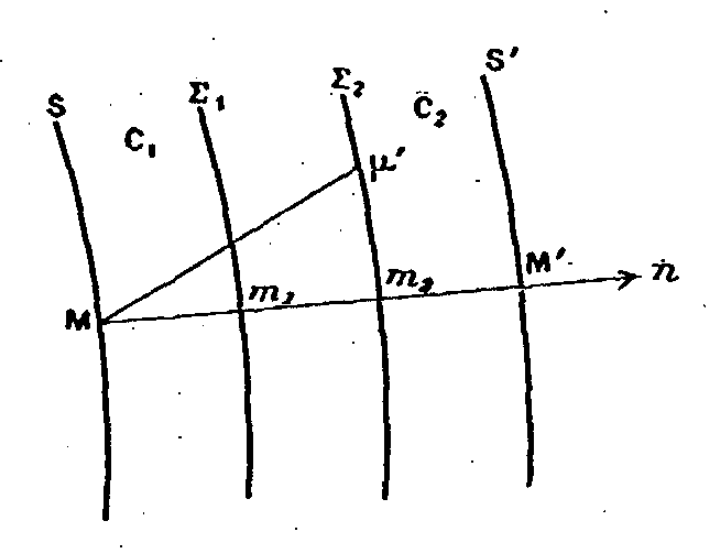
Laissons ce cas de côté, pour y revenir tout à l'heure, et étudions les ondes de choc.

Pour fixer les idées, supposons qu'il s'agisse d'une propagation du mouvement 2 dans le mouvement 1; d'ailleurs, nous pouvons toujours choisir les indices 1 et 2 de telle manière qu'il en soit ainsi. Ce seront donc les conditions (5) qui seront réalisées.

Considérons tous les points matériels qui, entre les instants t et $(t + dt)$,

seront atteints par l'onde de choc. A l'instant t, ils forment une couche comprise entre la surface S et une surface Σ_1 (*fig.* 2), située du côté 1 par rapport à la surface S. Les points matériels de la surface S sont ceux qui sont atteints par l'onde de choc à l'instant t; les points matériels qui sont, à l'instant t, sur la surface Σ_1


Fig. 2.



sont ceux qui seront atteints par l'onde de choc à l'instant $(t+dt)$. Si donc $\Delta_1 = \overline{Mm_1}$ est la distance normale d'un point de la surface S à la surface Σ_1, nous aurons, selon la formule (2),

$$\Delta_1 = \mathfrak{N}_1\, dt.$$

Les points matériels qui, à l'instant t, se trouvaient dans la couche C_1, d'épaisseur Δ_1, comprise entre les surfaces S et Σ_1, forment, à l'instant $(t+dt)$, une couche C_2, située du côté 2 de la surface S' et comprise entre la surface S' et la surface Σ_2, formée par les points matériels qui, à l'instant t, étaient sur la surface S.

Proposons-nous de calculer l'épaisseur Δ_2 de cette couche C_2.

La normale menée par le point M à la surface S rencontre la surface Σ_2 en m_2, la surface Σ' en M'; la longueur $\overline{m_2 M'}$ représente Δ_2 et, comme la surface Σ_2 est du côté 2 par rapport à la surface S', nous sommes sûrs que la direction $m_2 M'$ est celle de la normale n.

Dès lors, projetons sur la normale n :

1° La distance à la surface S' du point M de la surface S;

2° La distance du point M de la surface S à un point de la surface Σ_2, infiniment voisin du point m_2.

Retranchons la seconde projection de la première.

La différence sera assurément Δ_2.

La première projection est, par définition, $\mathfrak{N}\, dt$.

Prenons le point matériel qui se trouve en M à l'instant t; à l'instant $(t+dt)$, il se trouve en μ' sur la surface Σ_2; d'ailleurs, à partir de l'instant t, il est constamment du côté 2 de l'onde de choc; le segment $M\mu'$ a donc pour projection sur

les axes coordonnés $u_2\,dt$, $v_2\,dt$, $w_2\,dt$ et, sur la normale n,

$$(\alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma w_2)\,dt.$$

Nous trouvons ainsi

$$\Delta_2 = [\mathfrak{N} - (\alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma w_2)]\,dt$$

ou, selon l'égalité (3 *bis*),

(6 *bis*) $$\Delta_2 = -\mathfrak{V}_2\,dt.$$

Si, comme nous l'avons supposé, $\mathfrak{V}_1$ est positif, l'épaisseur Δ_1 et, par conséquent, le volume et la masse de la matière qui, à l'instant t, occupe la couche C_1, sont de l'ordre de dt; il faut qu'il en soit de même à l'instant $(t + dt)$, ce qui exclut l'hypothèse $\mathfrak{V}_2 = 0$.

On aurait pu démontrer de même que l'hypothèse $\mathfrak{V}_2 > 0$ exclut l'hypothèse $\mathfrak{V}_1 = 0$. Par conséquent, *une* ONDE DE CHOC *vérifie forcément l'une ou l'autre des hypothèses suivantes :*

PREMIER CAS. — *On a*

(7) $$\mathfrak{V}_1 > 0, \qquad \mathfrak{V}_2 < 0.$$

Le mouvement 2 se propage dans le mouvement 1 avec la vitesse $\mathfrak{V}_1$.

DEUXIÈME CAS. — *On a*

(7 *bis*) $$\mathfrak{V}_1 < 0, \qquad \mathfrak{V}_2 > 0.$$

Le mouvement 1 se propage dans le mouvement 2 avec la vitesse $\mathfrak{V}_2$.

Un TROISIÈME CAS est le cas de la surface de glissement. Pour que la surface S soit une surface de glissement, il faut et il suffit que les épaisseurs Δ_1, Δ_2 des deux couches C_1, C_2 soient égales à zéro. Les égalités (6) et (6 *bis*) donnent alors la proposition suivante :

Pour que la surface S *soit une* SURFACE DE GLISSEMENT *de deux couches fluides 1 et 2 l'une sur l'autre, il faut et il suffit que l'on ait*

(8) $$\mathfrak{V}_1 = 0, \qquad \mathfrak{V}_2 = 0.$$

Ces égalités exigent que l'on ait

(8 *bis*) $$\alpha(u_2 - u_1) + \beta(v_2 - v_1) + \gamma(w_2 - w_1) = 0.$$

Revenons au cas de l'*onde de choc.*

Prenons un point matériel (*fig.* 3) situé à l'instant t dans la couche C_1, en un point géométrique ν, et cherchons en quel point géométrique ν' de la couche C_2 il se trouve à l'instant $(t + dt)$.

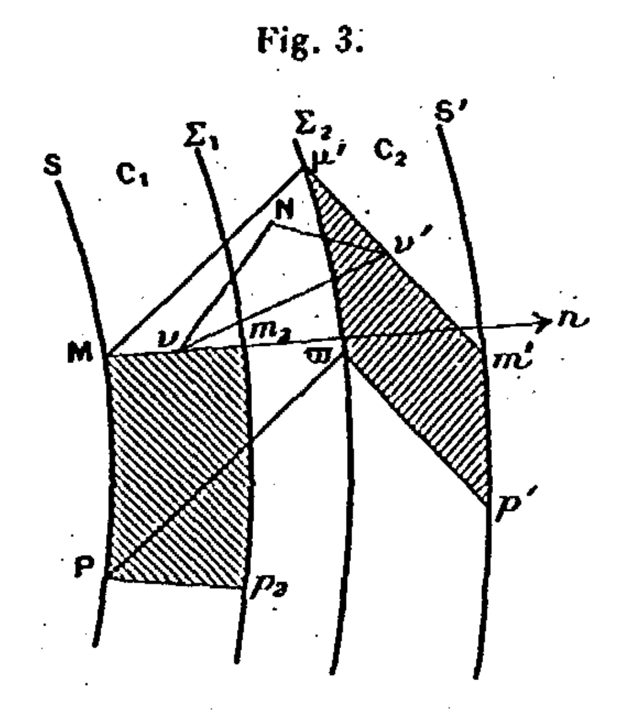
Soit δ_1 la distance normale μM_1 inférieure à Δ_1, du point ν à la surface S. Le point matériel considéré est atteint par l'onde de choc à l'instant $(t + d\tau)$, $d\tau$ étant donné, selon la formule (2), par l'égalité

$$d\tau = \frac{\delta_1}{\mathfrak{V}_1}.$$

Il est alors en N.

Entre les instants t et $(t + d\tau)$, le point matériel est du côté 1 de l'onde de choc.

Fig. 3.



Le segment νN a donc pour projections sur les axes de coordonnées, $u_1\, d\tau$, $v_1\, d\tau$, $w_1\, d\tau$ ou bien

$$u_1 \frac{\delta_1}{\mathfrak{V}_1}, \quad v_1 \frac{\delta_1}{\mathfrak{V}_1}, \quad w_1 \frac{\delta_1}{\mathfrak{V}_1}.$$

Entre les instants $d\tau$ et dt, ce même point matériel est du côté 2 de l'onde de choc. Le segment $N\nu'$ a donc pour projections sur les axes de coordonnées

$$u_2 (dt - d\tau) = u_2\, dt - u_2 \frac{\delta_1}{\mathfrak{V}_1},$$

$$v_2 (dt - d\tau) = v_2\, dt - v_2 \frac{\delta_1}{\mathfrak{V}_1},$$

$$w_2 (dt - d\tau) = w_2\, dt - w_2 \frac{\delta_1}{\mathfrak{V}_1}.$$

Le segment $\nu\nu'$ a donc pour projections sur les axes

$$u_2\, dt + (u_1 - u_2) \frac{\delta_1}{\mathfrak{V}_1},$$

$$v_2\, dt + (v_1 - v_2) \frac{\delta_1}{\mathfrak{V}_1},$$

$$w_2\, dt + (w_1 - w_2) \frac{\delta_1}{\mathfrak{V}_1}.$$

et le segment $M\nu'$ a pour projections sur ces mêmes axes

$$u_2\,dt + \left(\frac{u_1 - u_2}{\mathfrak{V}_1} + \alpha\right)\delta_1,$$

$$v_2\,dt + \left(\frac{v_1 - v_2}{\mathfrak{V}_1} + \beta\right)\delta_1,$$

$$w_2\,dt + \left(\frac{w_1 - w_2}{\mathfrak{V}_1} + \gamma\right)\delta_1.$$

Or $u_2\,dt$, $v_2\,dt$, $w_2\,dt$ sont les projections sur les axes du segment $M\mu'$. On voit donc que, pour obtenir le point ν', on doit porter, à partir du point μ', un segment dont les cosinus directeurs, proportionnels à

$$(9) \qquad \frac{u_1 - u_2}{\mathfrak{V}_1} + \alpha, \quad \frac{v_1 - v_2}{\mathfrak{V}_1} + \beta, \quad \frac{w_1 - w_2}{\mathfrak{V}_1} + \gamma,$$

dépendent de la position du point M sur la surface S, mais point de δ_1, et dont la longueur est proportionnelle à δ_1.

Il en résulte que tous les points matériels situés, à l'instant t, sur la ligne Mm_2, normale à S et issue du point M, se trouvent, à l'instant $(t + dt)$, sur la ligne droite $\mu' m'$, oblique à Σ_2 et issue du point μ'.

Considérons un petit cylindre droit $M m_2 P p_2$ dont la base $MP = dS$ est un élément de la surface S. Le fluide qui, à l'instant t, remplissait ce cylindre droit, se trouve, à l'instant $(t + dt)$, dans un petit cylindre oblique $\mu' m' \varpi' p'$. La base de ce petit cylindre s'obtient en donnant à chaque point de l'élément MP une translation de composantes $u_2\,dt$, $v_2\,dt$, $w_2\,dt$; sa génératrice, que limitent les deux surfaces Σ_2 et S', a des cosinus directeurs proportionnels aux quantités (9).

On a visiblement

$$MP = \mu'\varpi' = dS,$$

en sorte que le cylindre droit et le cylindre oblique ont même base. Mais la hauteur du premier est Δ_1 et la hauteur du second est Δ_2, en sorte que le volume du premier est au volume du second dans le rapport de Δ_1 à Δ_2. La même masse fluide qui, à l'instant t, remplit le premier avec la densité ρ_1, remplit le second, à l'instant $(t + dt)$, avec la densité ρ_2; on a donc

$$\rho_1 \Delta_1 = \rho_2 \Delta_2$$

ou bien, en vertu des égalités (6) et (6 *bis*),

$$(10) \qquad \rho_1 \mathfrak{V}_1 + \rho_2 \mathfrak{V}_2 = 0.$$

Cette relation, dans la question actuellement traitée, joue le rôle d'équation de

continuité. Elle a été donnée par Riemann ([1]) pour le cas simple où l'onde de choc est plane et où la vitesse du fluide est toujours normale à cette onde; elle a été généralisée par M. E. Jouguet ([2]).

§ 2. — Extension des principes de l'Hydrodynamique au cas où les vitesses offrent des discontinuités.

L'étude du mouvement d'un système quelconque repose sur le principe suivant ([3]) :

Lorsqu'un système est en mouvement, on a, à chaque instant t, et pour toutes les modifications virtuelles et isothermiques que l'on peut imposer au système à partir de l'état qu'il traverse à cet instant,

$$d\mathfrak{T}_e + d\mathfrak{T}_j + d\mathfrak{T}_v - \delta_T \mathfrak{F} = 0. \tag{11}$$

$\mathfrak{F}$ est le potentiel interne du système,
$d\mathfrak{T}_e$ est le travail virtuel des actions extérieures,
$d\mathfrak{T}_j$ est le travail virtuel des forces d'inertie,
$d\mathfrak{T}_v$ est le travail virtuel des actions de viscosité.

Le travail virtuel des actions d'inertie a pour valeur

$$d\mathfrak{T}_j = -\int (\gamma_x \delta x + \gamma_y \delta y + \gamma_z \delta z)\, dm, \tag{12}$$

$\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ étant les composantes de l'accélération de la masse élémentaire dm,
$\delta x, \delta y, \delta z$ les composantes du déplacement virtuel de la même masse,
et l'intégration s'étendant à toutes les masses élémentaires du système.

Évidemment, pour que ce principe ait un sens, il faut qu'à chaque instant t du mouvement, chacune des masses élémentaires qui composent le système ait une accélération finie et déterminée.

C'est ce qui n'aura pas lieu si, à l'instant t, certaines masses élémentaires dm passent brusquement d'une vitesse u_1, v_1, w_1 à une autre vitesse u_2, v_2, w_2; dans ce cas, la masse élémentaire dm a, à l'instant t, une accélération infinie. Ce cas est précisément celui qui se présente si, à l'instant t, le fluide est le siège d'une onde de choc. Le principe énoncé en l'égalité (11) perd donc tout sens si le fluide est, à l'instant t, le siège d'une onde de choc.

([1]) B. Riemann, *Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite* (*Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Bd VIII, 1860. — *Riemann's Werke*, p. 145).

([2]) E. Jouguet, *Comptes rendus*, t. CXXXII, p. 673; 18 mars 1901.

([3]) Première Partie, égalité (2).

Le principe exprimé par l'égalité (11) peut se mettre sous une forme un peu différente; cette forme est rigoureusement équivalente à la précédente toutes les fois qu'à l'instant t chaque masse élémentaire a une accélération finie et déterminée; mais elle a sur la précédente l'avantage de garder un sens dans le cas où le fluide est le siège d'une onde de choc; nous ferons alors l'hypothèse que cette proposition, qui garde un sens, continue d'exprimer un principe exact.

Soient u, v, w les composantes de la vitesse de la masse élémentaire dm, à l'instant t, et u', v', w' les composantes de la vitesse de la même masse élémentaire, à l'instant $(t+dt)$. Si, à l'instant t, la masse élémentaire dm admet une accélération finie et déterminée dont γ_x, γ_y, γ_z sont les composantes, on peut écrire

$$\gamma_x = \frac{u'-u}{dt}, \qquad \gamma_y = \frac{v'-v}{dt}, \qquad \gamma_z = \frac{w'-w}{dt}.$$

S'il en est de même pour toutes les masses élémentaires du système, l'égalité (12) devient

$$d\mathfrak{F}_j = -\frac{1}{dt}\int [(u'-u)\,\delta x + (v'-v)\,\delta y + (w'-w)\,\delta z]\,dm$$

et l'égalité (11) s'écrit

$$(13)\quad (d\mathfrak{E}_e + d\mathfrak{F}_v - \delta_T \mathfrak{F})\,dt - \int [(u'-u)\,\delta x + (v'-v)\,\delta y + (w'-w)\,\delta z]\,dm = 0.$$

*Cette proposition garde un sens même s'il existe des masses élémentaires dm pour lesquelles, entre les instants t et $(t+dt)$, les trois composantes de la vitesse éprouvent des variations $(u'-u)$, $(v'-v)$, $(w'-w)$, qui sont finies, pourvu que l'intégrale $\int dm$, étendue à ces masses, soit de l'ordre de dt. Nous ferons l'*HYPOTHÈSE *que, dans ce cas, cette proposition continue d'exprimer un principe exact.*

Il est bien entendu, d'ailleurs, que l'on continue d'avoir, dans toute la masse fluide,

$$\delta x = \varepsilon f(x, y, z), \qquad \delta y = \varepsilon g(x, y, z), \qquad \delta z = \varepsilon h(x, y, z),$$

ε étant une quantité infiniment petite indépendante de x, y, z et f, g, h étant trois fonctions régulières dans toute la masse fluide.

La formule

$$\delta\rho = -\rho\left(\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right)$$

nous montre alors que

$$\delta\rho = \varepsilon\, r(x, y, z),$$

r étant une fonction finie dans toute la masse fluide.

Partageons le fluide étudié en deux parties que nous désignerons par les indices a et b; tous les points matériels qui, entre les instants t et $(t+dt)$, cessent d'avoir une accélération finie et déterminée seront supposés *intérieurs* à la partie a; par conséquent, entre les instants t et $(t+dt)$, il existera une accélération finie et déterminée en tous les points de la masse b et de la surface Σ qui la sépare de la masse a.

Nous avons, en conservant les notations de la première Partie [égalités (67)],

$$\delta_T \mathfrak{F} = \delta_T \int \zeta(\rho, T)\, dm - \int (X_i\, \delta x + Y_i\, \delta y + Z_i\, \delta z + A_i\, \delta\rho)\, dm,$$

les deux intégrations s'étendant à la masse fluide tout entière.

Mais, d'une part,

$$\int \zeta(\rho, T)\, dm = \int_a \zeta(\rho, T)\, dm + \int_b \zeta(\rho, T)\, dm.$$

D'autre part, en vertu de sa définition [Ire Partie, équations (67)], la quantité X_i peut s'écrire

$$X_i = X_{ia} + X_{ib},$$

X_{ia} étant la partie de X_i qui provient des actions exercées, au point considéré, par les diverses parties de la masse a et X_{ib} étant la partie de X_i qui provient des actions exercées, au même point, par les diverses parties de la masse b. Les quantités Y_i, Z_i, A_i se décomposent d'une manière analogue. On a donc

$$\begin{aligned}
&\int (X_i\, \delta x + Y_i\, \delta y + Z_i\, \delta z + A_i\, \delta\rho)\, dm \\
&= \int_a (X_{ia}\, \delta x + Y_{ia}\, \delta y + Z_{ia}\, \delta z + A_{ia}\, \delta\rho)\, dm \\
&+ \int_a (X_{ib}\, \delta x + Y_{ib}\, \delta y + Z_{ib}\, \delta z + A_{ib}\, \delta\rho)\, dm \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

$+\ldots$ désignant deux termes analogues aux termes déjà écrits, mais où les intégrales s'étendraient à la masse b.

Soient $\mathfrak{F}_a$ le potentiel interne de la masse a et $\mathfrak{F}_b$ le potentiel interne de la masse b. Nous aurons visiblement

$$\delta_T \mathfrak{F}_a = \delta_T \int_a \zeta(\rho, T)\, dm - \int_a (X_{ia}\, \delta x + Y_{ia}\, \delta y + Z_{ia}\, \delta z + A_{ia}\, \delta\rho)\, dm,$$

$$\delta_T \mathfrak{F}_b = \delta_T \int_b \zeta(\rho, T)\, dm - \int_b (X_{ib}\, \delta x + Y_{ib}\, \delta y + Z_{ib}\, \delta z + A_{ib}\, \delta\rho)\, dm.$$

Toutes ces égalités nous permettent d'écrire,

$$(14)\qquad \delta_T \mathcal{F} = \delta_T \mathcal{F}_a - \int_a (X_{ib}\,\delta x + Y_{ib}\,\delta y + Z_{ib}\,\delta z + A_{ib}\,\delta\rho)\,dm$$
$$+ \delta_T \mathcal{F}_b - \int_b (X_{ia}\,\delta x + Y_{ia}\,\delta y + Z_{ia}\,\delta z + A_{ia}\,\delta\rho)\,dm.$$

Pour simplifier le calcul du travail virtuel $d\mathcal{E}_e$ des actions extérieures, nous supposerons que la masse a n'a aucun point commun avec la partie, soumise à des déformations virtuelles, de la surface S qui limite le fluide; nous aurons alors

$$(15)\qquad d\mathcal{E}_e = \int_a (X_e\,\delta x + Y_e\,\delta y + Z_e\,\delta z + A_e\,\delta\rho)\,dm$$
$$+ \int_b (X_e\,\delta x + Y_e\,\delta y + Z_e\,\delta z + A_e\,\delta\rho)\,dm$$
$$+ \int (P_x\,\delta x + P_y\,\delta y + P_z\,\delta z)\,dS.$$

Si nous supposons, comme nous le ferons dorénavant, les deux masses a et b *soudées* l'une à l'autre, le travail virtuel $d\mathcal{E}_v$ des actions de viscosité sera la somme des travaux virtuels des viscosités intrinsèques des deux parties a et b :

$$(16)\qquad d\mathcal{E}_v = d\mathcal{E}_{va} + d\mathcal{E}_{vb}.$$

Enfin, comme l'accélération est finie et déterminée en tous les points de la masse b, il est clair que l'on peut écrire

$$(17)\qquad d\mathcal{E}_j = -\frac{1}{dt}\int_a [(u'-u)\,\delta x + (v'-v)\,\delta y + (w'-w)\,\delta z]\,dm$$
$$- \int_b (\gamma_x\,\delta x + \gamma_y\,\delta y + \gamma_z\,\delta z)\,dm.$$

En vertu des égalités (14), (15), (16), (17), l'égalité (13) peut s'écrire

$$(18)\qquad A + B = 0,$$

avec

$$(19)\qquad A = dt\Big\{ d\mathcal{E}_{va} - \delta_T \mathcal{F}_a$$
$$+ \int_a [(X_e + X_{ib})\,\delta x + (Y_e + Y_{ib})\,\delta y + (Z_e + Z_{ib})\,\delta z + (A_e + A_{ib})\,\delta\rho]\,dm\Big\}$$
$$- \int_a [(u'-u)\,\delta x + (v'-v)\,\delta y + (w'-w)\,\delta z]\,dm$$

et

$$(20)\quad \frac{B}{dt} = d\mathfrak{E}_{vb} - \delta_T \mathfrak{F}_e - \int_b (\gamma_x \delta x + \gamma_y \delta y + \gamma_z \delta z)\, dm$$
$$+ \int_b [(X_e + X_{ia})\delta x + (Y_e + Y_{ia})\delta y + (Z_e + Z_{ia})\delta z + (A_e + A_{ia})\delta\rho]\, dm$$
$$+ \int (P_x \delta x + P_y \delta y + P_z \delta z)\, dS.$$

Nous allons maintenant donner de B une autre expression.

Nous pouvons, en premier lieu, donner au système une modification virtuelle qui laisse immobiles et invariables tous les éléments de la masse a; A est alors identiquement nul, et l'égalité (18) se réduit à

$$B = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{B}{dt} = 0.$$

Si l'on se reporte alors à l'égalité (20) et si l'on observe qu'au sein de la masse b les composantes u, v, w de la vitesse varient d'une manière continue d'un point à l'autre et d'un instant à l'autre, on reconnaît que la question à traiter est semblable de tout point à la mise en équations du problème fondamental de l'Hydrodynamique. Il est inutile de reprendre en détail la solution de ce problème; nous pouvons indiquer d'emblée les résultats suivants, analogues à ceux que nous avons obtenus en la première Partie [égalités (74), (75), (76)] :

1° On a, en tout point de la masse b,

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Pi}{\partial x} - \rho(X_{ib} + X_{ia} + X_e - \gamma_x) - q_x = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial \Pi}{\partial y} - \rho(Y_{ib} + Y_{ia} + Y_e - \gamma_y) - q_y = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial \Pi}{\partial z} - \rho(Z_{ib} + Z_{ia} + Z_e - \gamma_z) - q_z = 0, \end{cases}$$

$$(22)\quad \Pi + \rho^2(A_{ib} + A_{ia} + A_e) - \rho^2 \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} = 0.$$

2° On a, en tout point de la surface S, où n_i est la normale vers l'intérieur de la masse b,

$$(23)\quad \begin{cases} \Pi \cos(n_i, x) = P_x + p_x, \\ \Pi \cos(n_i, y) = P_y + p_y, \\ \Pi \cos(n_i, z) = P_z + p_z. \end{cases}$$

Dans ces égalités, Π est une fonction régulière de x, y, z; les quantités p_x, p_y, p_z

sont données par les égalités (48) de la première Partie, savoir

$$(24)\quad \begin{cases} p_x = -[\nu_x \cos(n_i, x) + \tau_z \cos(n_i, y) + \tau_y \cos(n_i, z)], \\ p_y = -[\tau_z \cos(n_i, x) + \nu_y \cos(n_i, y) + \tau_x \cos(n_i, z)], \\ p_z = -[\tau_y \cos(n_i, x) + \tau_x \cos(n_i, y) + \nu_z \cos(n_i, z)], \end{cases}$$

tandis que les quantités q_x, q_y, q_z sont données par les égalités (49) de la première Partie, savoir

$$(25)\quad \begin{cases} q_x = -\left(\dfrac{\partial\nu_x}{\partial x} + \dfrac{\partial\tau_z}{\partial y} + \dfrac{\partial\tau_y}{\partial z}\right), \\ q_y = -\left(\dfrac{\partial\tau_z}{\partial x} + \dfrac{\partial\nu_y}{\partial y} + \dfrac{\partial\tau_x}{\partial z}\right), \\ q_z = -\left(\dfrac{\partial\tau_y}{\partial x} + \dfrac{\partial\tau_x}{\partial y} + \dfrac{\partial\nu_z}{\partial z}\right). \end{cases}$$

Ces résultats acquis, donnons au système une modification virtuelle quelconque. Multiplions respectivement les égalités (21) par $\delta x\, d\varpi$, $\delta y\, d\varpi$, $\delta z\, d\varpi$; ajoutons membre à membre les résultats et intégrons pour la masse b tout entière; si nous tenons compte des égalités (24), (25) et de l'égalité

$$\delta\rho = -\rho\left(\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right),$$

des intégrations très faciles transforment l'égalité obtenue en la suivante :

$$(26)\quad \begin{aligned} &\int_b [(X_{ia} + X_{ib} + X_e - \gamma_x)\,\delta x + (Y_{ia} + Y_{ib} + Y_e - \gamma_y)\,\delta y \\ &\qquad\qquad + (Z_{ia} + Z_{ib} + Z_e - \gamma_z)\,\delta z]\, dm \\ &-\int_b \frac{\Pi}{\rho^2}\,\delta\rho\, dm \\ &+\int_b \left[\nu_x \frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \nu_y \frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \nu_z \frac{\partial\,\delta z}{\partial z} + \tau_x\left(\frac{\partial\,\delta y}{\partial z} + \frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right)\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \tau_y\left(\frac{\partial\,\delta z}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta x}{\partial z}\right) + \tau_z\left(\frac{\partial\,\delta x}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta y}{\partial x}\right)\right] d\varpi \\ &+\int_S \big\{ [\Pi \cos(n_i, x) - p_x]\,\delta x + [\Pi\cos(n_i, y) - p_y]\,\delta y \\ &\qquad\qquad + [\Pi\cos(n_i, z) - p_z]\,\delta z \big\}\, dS \\ &-\int_\Sigma \big\{ [(\Pi + \nu_x)\cos(n_a, x) + \tau_z \cos(n_a, y) + \tau_y \cos(n_a, z)]\,\delta x \\ &\quad + [\tau_z \cos(n_a, x) + (\Pi + \nu_y)\cos(n_a, y) + \tau_x \cos(n_a, z)]\,\delta y \\ &\quad + [\tau_y \cos(n_a, x) + \tau_x \cos(n_a, y) + (\Pi + \nu_z)\cos(n_a, z)]\,\delta z \big\}\, d\Sigma = 0, \end{aligned}$$

n_a étant la normale menée, en un point de la surface Σ, vers l'intérieur de la masse a.

Tenons compte des égalités (22) et (23); observons que l'on a

$$\delta_T \mathfrak{F}_b = \int_b \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \delta\rho \, dm - \int_b (X_{ib}\,\delta x + Y_{ib}\,\delta y + Z_{ib}\,\delta z + A_{ib}\,\delta\rho)\, dm,$$

$$d\,\mathfrak{T}_{vb} = \int_b \Big[\nu_x \frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \nu_y \frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \nu_z \frac{\partial\,\delta z}{\partial z} + \tau_x\Big(\frac{\partial\,\delta z}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta y}{\partial z}\Big) + \tau_y\Big(\frac{\partial\,\delta x}{\partial z} + \frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\Big) + \tau_z\Big(\frac{\partial\,\delta y}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta x}{\partial y}\Big)\Big] d\varpi,$$

et les égalités (20) et (26) nous donneront

$$\begin{aligned}\frac{B}{dt} = \int_\Sigma \Big\{ & [(\Pi + \nu_x)\cos(n_a, x) + \tau_z \cos(n_a, y) + \tau_y \cos(n_a, z)]\,\delta x \\ + & [\tau_z \cos(n_a, x) + (\Pi + \nu_y)\cos(n_a, y) + \tau_x \cos(n_a, z)]\,\delta y \\ + & [\tau_y \cos(n_a, x) + \tau_x \cos(n_a, y) + (\Pi + \nu_z)\cos(n_a, z)]\,\delta z \Big\}\, d\Sigma.\end{aligned}$$

Cette égalité, jointe à l'égalité (19), transforme l'égalité (18) en

$$(27)\quad \begin{aligned} & \int_a [(u' - u)\,\delta x + (v' - v)\,\delta y + (w' - w)\,\delta z]\, dm - dt\, d\mathfrak{T}_{va} + dt\,\delta_T \mathfrak{F}_a \\ & - dt \int_a [(X_e + X_{ib})\,\delta x + (Y_e + Y_{ib})\,\delta y + (Z_e + Z_{ib})\,\delta z + (A_e + A_{ib})\,\delta\rho]\, dm \\ & - dt \int_\Sigma \Big\{ [(\Pi + \nu_x)\cos(n_a, x) + \tau_z \cos(n_a, y) + \tau_y \cos(n_a, z)]\,\delta x \\ & \qquad + [\tau_z \cos(n_a, x) + (\Pi + \nu_y)\cos(n_a, y) + \tau_x \cos(n_a, z)]\,\delta y \\ & \qquad + [\tau_y \cos(n_a, x) + \tau_x \cos(n_a, y) + (\Pi + \nu_z)\cos(n_a, z)]\,\delta z \Big\}\, d\Sigma = 0. \end{aligned}$$

C'est l'égalité dont nous allons faire usage.

§ 3. — Application de l'égalité précédente a une onde de choc.

Considérons un fluide qui est le siège d'une onde de choc.

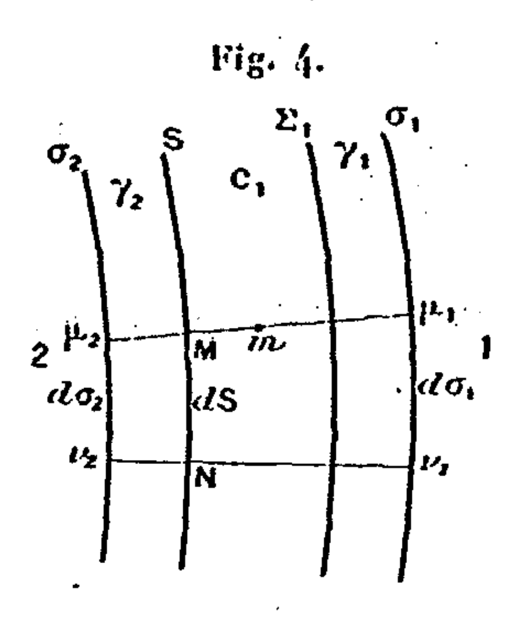
A l'instant t, cette onde est en S (*fig.* 4); les points matériels qu'elle doit atteindre entre les instants t et $(t + dt)$ sont, à l'instant t, compris entre la surface S et une surface Σ_1, déjà considérée au § I; ils forment une couche C_1, d'épaisseur $\mathfrak{V}_1\, dt$.

Au voisinage de la surface Σ_1 et du côté 1 par rapport à cette surface, menons une surface σ_1 dont la distance à la surface Σ_1 ait pour valeur $\varepsilon_1\, dt$, ε_1 étant une quantité finie, qui varie d'une manière continue le long de la surface Σ_1; entre les

deux surfaces Σ_1, σ_1 se trouvent, à l'instant t, des points matériels qui forment une couche γ_1.

Au voisinage de la surface S et du côté 2 par rapport à cette surface, menons une surface σ_2 dont la distance à la surface S ait pour valeur $\varepsilon_2\,dt$, ε_2 étant une

Fig. 4.



quantité finie, qui varie d'une manière continue le long de la surface S; entre les deux surfaces σ_2, S, se trouvent, à l'instant t, des points matériels qui forment une couche γ_2.

Les points matériels qui, à l'instant t, se trouvent au sein des couches γ_1, C_1, γ_2 vont composer la masse a, à laquelle nous allons appliquer l'égalité (27). La surface désignée dans cette égalité par Σ se composera ici des deux surfaces σ_1, σ_2.

Il est clair que, dans cette égalité (27), nous pouvons supprimer tout terme qui est un infiniment petit d'ordre supérieur à $dt\,\delta x$ ou à $dt\,\delta y$ ou à $dt\,\delta z$.

Évaluons d'abord le terme

$$\int_a [(u'-u)\,\delta x + (v'-v)\,\delta y + (w'-w)\,\delta z]\,dm.$$

Pour toute masse dm prise soit dans la couche γ_1, soit dans la couche γ_2, les différences $(u'-u)$, $(v'-v)$, $(w'-w)$ sont des infiniment petits de l'ordre de dt; la masse totale de ces deux couches étant elle-même un infiniment petit de l'ordre de dt, la considération des masses dm qui leur appartiennent fournit seulement au terme considéré un contingent de l'ordre de $dt^2\,\delta x$ ou de $dt^2\,\delta y$ ou de $dt^2\,\delta z$; on peut donc faire abstraction de ces masses.

Il n'en est pas de même des masses qui forment la couche C_1.

Prenons un point m au sein de cette couche et projetons-le orthogonalement en M sur la surface S. Au point m, les différences $(u'-u)$, $(v'-v)$, $(w'-w)$ ont respectivement pour terme principal (u_2-u_1), (v_2-v_1), (w_2-w_1), ces dernières différences se rapportant au point M; les quantités δx, δy, δz ont respectivement pour terme principal les valeurs de δx, δy, δz au point M; enfin, si la masse dm, dont m est un point à l'instant t, occupe à cet instant un volume $d\varpi$, sa densité à ce même instant diffère infiniment peu de la valeur de ρ_1 au point M.

La quantité à calculer a donc pour terme principal

$$\int_{C_1} \rho_1 [(u_2 - u_1)\,\delta x + (v_2 - v_1)\,\delta y + (w_2 - w_1)\,\delta z]\,d\varpi,$$

la quantité sous le signe $\int$ ayant la valeur qu'elle prend au point M, projection orthogonale sur la surface S d'un point m du volume élémentaire $d\varpi$.

Dès lors, on voit sans peine que l'on peut écrire, en négligeant les termes de l'ordre de $dt^2\,\delta x$, $dt^2\,\delta y$, $dt^2\,\delta z$,

$$(28)\qquad \begin{aligned} &\int_a [(u' - u)\,\delta x + (v' - v)\,\delta y + (w' - w)\,\delta z]\,dm \\ &= dt \int_S [(u_2 - u_1)\,\delta x + (v_2 - v_1)\,\delta y + (w_2 - w_1)\,\delta z]\,\rho_1 \mathfrak{V}_1\,dS. \end{aligned}$$

On a

$$dt\,\delta_T \mathfrak{F}_a = dt \int_a \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho}\,\delta\rho\,dm.$$

Si l'on observe que la masse a, formée des couches γ_1, C_1, γ_2, est de l'ordre de dt, on voit sans peine que le second membre est de l'ordre de dt^2, ce qui permet d'écrire

$$(29)\qquad dt\,\delta_T \mathfrak{F}_a = 0.$$

Une raison semblable permet d'écrire

$$(30)\qquad dt \int_a [(X_e + X_{ib})\,\delta x + (Y_e + Y_{ib})\,\delta y + (Z_e + Z_{ib})\,\delta z + (\Lambda_e + \Lambda_{ib})\,\delta\rho]\,dm = 0.$$

Proposons-nous enfin de calculer le terme

$$(31)\qquad \begin{aligned} J = dt \int_\Sigma \Big\{ & [(\Pi + \nu_x)\cos(n_a, x) + \tau_z \cos(n_a, y) + \tau_y \cos(n_a, z)]\,\delta x \\ & + [\tau_z \cos(n_a, x) + (\Pi + \nu_y)\cos(n_a, y) + \tau_x \cos(n_a, z)]\,\delta y \\ & + [\tau_y \cos(n_a, x) + \tau_x \cos(n_a, y) + (\Pi + \nu_z)\cos(n_a, z)]\,\delta z \Big\}\,d\Sigma. \end{aligned}$$

La surface Σ se composant ici des deux surfaces σ_1, σ_2, on peut écrire

$$(32)\qquad J = J_1 + J_2,$$

J_1, J_2 étant des termes, analogues à J, qui se rapportent respectivement aux surfaces σ_1, σ_2.

Lorsqu'un point tend vers le point M de la surface S en demeurant du côté 1 de

cette surface, les quantités

$$\text{II},\quad \nu_x,\quad \nu_y,\quad \nu_z,\quad \tau_x,\quad \tau_y,\quad \tau_z$$

ont pour limites respectives

$$\text{II}_1,\quad \nu_{x1},\quad \nu_{y1},\quad \nu_{z1},\quad \tau_{x1},\quad \tau_{y1},\quad \tau_{z1}.$$

Lorsqu'un point tend vers le point M en demeurant du côté 2 de la surface S, les mêmes quantités ont pour limites respectives

$$\text{II}_2,\quad \nu_{x2},\quad \nu_{y2},\quad \nu_{z2},\quad \tau_{x2},\quad \tau_{y2},\quad \tau_{z2}.$$

Considérons un élément $\mu_1\nu_1 = d\sigma_1$ de la surface σ_1.

L'aire de cet élément a pour terme principal l'aire de l'élément $MN = dS$, projection orthogonale du premier sur la surface S.

Les quantités δx, δy, δz relatives au point μ_1 sont respectivement égales, aux infiniment petits d'ordre supérieur près, aux quantités δx, δy, δz relatives au point M. Les termes principaux des quantités

$$\text{II},\quad \nu_x,\quad \nu_y,\quad \nu_z,\quad \tau_x,\quad \tau_y,\quad \tau_z$$

relatives au point μ_1 sont respectivement égaux aux quantités

$$\text{II}_1,\quad \nu_{x1},\quad \nu_{y1},\quad \nu_{z1},\quad \tau_{x1},\quad \tau_{y1},\quad \tau_{z1} \tag{33}$$

relatives au point M.

Enfin, la direction n_a de la normale à la surface σ_1 issue du point μ_1 et dirigée vers l'intérieur de la masse a diffère infiniment peu de la direction $\mu_1 M$. Suivant les notations posées au § 1, la direction $M\mu_1$ a pour cosinus directeurs α, β, γ. On a donc, en négligeant les infiniment petits,

$$\cos(n_a, x) = -\alpha,\qquad \cos(n_a, y) = -\beta,\qquad \cos(n_a, z) = -\gamma. \tag{34}$$

Si donc nous posons

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{P}_{x1} &= (\text{II}_1 + \nu_{x1})\alpha + \tau_{z1}\beta + \tau_{y1}\gamma,\\ \mathfrak{P}_{y1} &= \tau_{z1}\alpha + (\text{II}_1 + \nu_{y1})\beta + \tau_{x1}\gamma,\\ \mathfrak{P}_{z1} &= \tau_{y1}\alpha + \tau_{x1}\beta + (\text{II}_1 + \nu_{z1})\gamma, \end{aligned}\right. \tag{35}$$

nous pourrons écrire

$$J_1 = -dt\int_S (\mathfrak{P}_{x1}\,\delta x + \mathfrak{P}_{y1}\,\delta y + \mathfrak{P}_{z1}\,\delta z)\,dS. \tag{36}$$

Le calcul de J_2 sera conduit d'une manière analogue; seulement, dans ce calcul,

les quantités (33) devront être remplacées par les quantités

(33 *bis*) $\Pi_2, \quad \nu_{x2}, \quad \nu_{y2}, \quad \nu_{z2}, \quad \tau_{x2}, \quad \tau_{y2}, \quad \tau_{z2}.$

En outre, la normale n_a à la surface σ_2, issue du point μ_2 et dirigée vers l'intérieur de la masse a, différera infiniment peu de la direction $\mu_2 M$; les égalités (34) devront être remplacées par les égalités

(34 *bis*) $\cos(n_a, x) = \alpha, \qquad \cos(n_a, y) = \beta, \qquad \cos(n_a, z) = \gamma.$

Si donc nous posons

(35 *bis*)
$$\begin{cases} \mathfrak{P}_{x2} = (\Pi_2 + \nu_{x2})\alpha + \tau_{z2}\beta + \tau_{y2}\gamma, \\ \mathfrak{P}_{y2} = \tau_{z2}\alpha + (\Pi_2 + \nu_{y2})\beta + \tau_{x2}\gamma, \\ \mathfrak{P}_{z2} = \tau_{y2}\alpha + \tau_{x2}\beta + (\Pi_2 + \nu_{z2})\gamma, \end{cases}$$

nous aurons

(36 *bis*)
$$J_2 = dt \int_S (\mathfrak{P}_{x2}\,\delta x + \mathfrak{P}_{y2}\,\delta y + \mathfrak{P}_{z2}\,\delta z)\,dS.$$

En vertu des égalités (28), (29), (30), (31), (32), (36), (36 *bis*), et après suppression du facteur commun dt, l'égalité (27) devient

(37)
$$\begin{aligned} \int_S \Big\{ & [(u_2 - u_1)\rho_1 \mathfrak{V}_1 - \mathfrak{P}_{x2} + \mathfrak{P}_{x1}]\,\delta x \\ & + [(v_2 - v_1)\rho_1 \mathfrak{V}_1 - \mathfrak{P}_{y2} + \mathfrak{P}_{y1}]\,\delta y \\ & + [(w_2 - w_1)\rho_1 \mathfrak{V}_1 - \mathfrak{P}_{z2} + \mathfrak{P}_{z1}]\,\delta z \Big\}\,dS - d\mathfrak{T}_{va} = 0. \end{aligned}$$

Notre effort va porter maintenant sur l'évaluation du terme $d\mathfrak{T}_{va}$.

§ 4. — De la viscosité en une onde de choc.

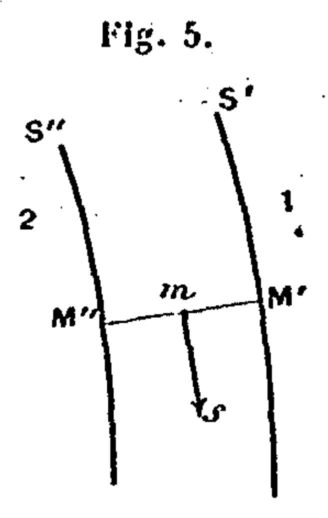
Les principes posés, en la première Partie de ces Recherches, touchant l'étude de la viscosité, ne sont plus applicables ici; ils supposent essentiellement que les quantités u, v, w varient d'une manière continue d'un point à l'autre de la masse fluide; il n'en est plus ainsi dans le cas qui nous occupe en ce moment. Il nous faut donc, pour évaluer le terme $d\mathrm{T}_{va}$, introduire des hypothèses nouvelles touchant les actions de viscosité.

Pour introduire ces hypothèses d'une façon à la fois logique et naturelle, nous allons considérer le cas où la vitesse (u, v, w) subit une variation brusque au travers d'une certaine surface comme la limite du cas où la vitesse varie très rapidement à l'intérieur d'une couche très mince. Ce dernier cas peut être traité par les principes qui ont été posés en la première Partie de ces Recherches.

Remplaçons donc la surface S par deux surfaces très voisines S′, S″ (*fig.* 5), la surface S″ étant du côté 2 par rapport à la surface S′.

Prenons un point M″ sur la surface S″ et projetons-le orthogonalement en M′ sur la surface S′; nous désignerons par α, β, γ les cosinus directeurs de la direc-

Fig. 5.



tion M″M′ et par h la longueur M″M′. Si m est un point de la ligne M″M′, nous désignerons par l la longueur M″m; lorsque m se déplacera de M″ à M′, l variera de o à h.

Nous désignerons par u_1, v_1, w_1 les composantes de la vitesse au point M′ et par u_2, v_2, w_2 les composantes de la vitesse au point M″. Si, laissant invariables ces quantités, nous faisons tendre h vers o, de telle sorte que la surface S″ tende à s'appliquer sur la surface S′, la disposition étudiée aura pour limite celle que nous avons examinée aux paragraphes précédents.

Il est clair que, dans ces conditions, les quantités

$$\frac{\partial u}{\partial l}, \quad \frac{\partial v}{\partial l}, \quad \frac{\partial w}{\partial l},$$

calculées au point m, seront, en général, des quantités infiniment grandes de l'ordre de $\frac{1}{h}$. *Nous supposerons que, le long de la ligne* M″M′, *chacune des trois quantités* u, v, w, *a un sens unique de variation;* dans ces conditions, les quantités

$$\frac{\partial u}{\partial l}, \quad \frac{\partial v}{\partial l}, \quad \frac{\partial w}{\partial l}$$

auront, en tout point de la ligne M″M′, respectivement le même signe que

$$u_1 - u_2, \quad v_1 - v_2, \quad w_1 - w_2.$$

Soit s une direction quelconque menée par le point m, normalement à M′M″; *il nous est loisible de supposer que les quantités*

$$\frac{\partial u}{\partial s}, \quad \frac{\partial v}{\partial s}, \quad \frac{\partial w}{\partial s}$$

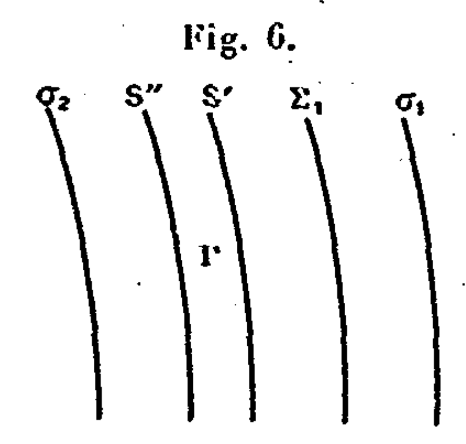
ne croissent pas au delà de toute limite lorsque h tend vers o.

Dès lors, si nous écrivons seulement les termes qui sont, en général, infinis comme $\frac{1}{h}$, nous aurons

$$(38)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \alpha \dfrac{\partial u}{\partial l}, & \dfrac{\partial u}{\partial y} = \beta \dfrac{\partial u}{\partial l}, & \dfrac{\partial u}{\partial z} = \gamma \dfrac{\partial u}{\partial l}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = \alpha \dfrac{\partial v}{\partial l}, & \dfrac{\partial v}{\partial y} = \beta \dfrac{\partial v}{\partial l}, & \dfrac{\partial v}{\partial z} = \gamma \dfrac{\partial v}{\partial l}, \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} = \alpha \dfrac{\partial w}{\partial l}, & \dfrac{\partial w}{\partial y} = \beta \dfrac{\partial w}{\partial l}, & \dfrac{\partial w}{\partial z} = \gamma \dfrac{\partial w}{\partial l}. \end{cases}$$

Considérons tous les éléments matériels qui, à un instant quelconque compris entre t et $(t + dt)$, feront partie de la couche où les vitesses varient très rapidement d'un point à l'autre. A l'instant t, ils sont tous compris entre la surface S'' et la surface Σ_1 (*fig.* 6). Du côté 1 de la surface Σ_1, traçons la surface σ_1 à une dis-

Fig. 6.



tance $\varepsilon_1\, dt$ de la première; du côté 2 de la surface S'', traçons-la sur la surface σ_2 à une distance $\varepsilon_2\, dt$ de cette surface S''. Appelons a la masse comprise entre σ_1 et σ_2 et calculons $d\mathfrak{T}_{va}$ ou plutôt la limite vers laquelle tend cette quantité lorsque h tend vers o. Notre objet étant d'expliciter l'égalité (37), nous ne garderons dans ce calcul que les termes finis.

Nous pouvons faire usage ici des principes touchant la viscosité posés en la première Partie de ces Recherches; nous aurons donc [Ire Partie, égalité (46)]

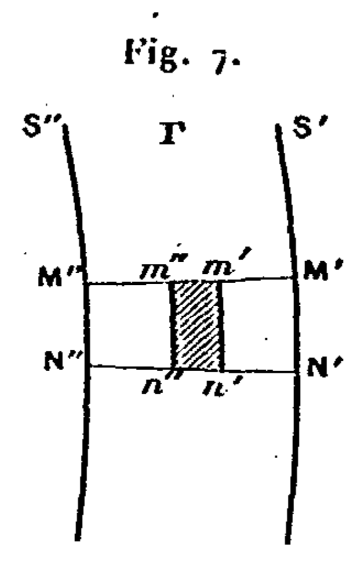
$$(39)\quad d\mathfrak{T}_{va} = \int_a \left[\nu_x \frac{\partial\, \delta x}{\partial x} + \nu_y \frac{\partial\, \delta y}{\partial y} + \nu_z \frac{\partial\, \delta z}{\partial z} + \tau_x \left(\frac{\partial\, \delta y}{\partial z} + \frac{\partial\, \delta z}{\partial y} \right) + \tau_y \left(\frac{\partial\, \delta z}{\partial x} + \frac{\partial\, \delta x}{\partial z} \right) + \tau_z \left(\frac{\partial\, \delta x}{\partial y} + \frac{\partial\, \delta y}{\partial x} \right) \right] d\varpi.$$

Soit Γ la couche comprise entre les surfaces S' et S''. Pour tout élément de volume $d\varpi$ n'appartenant pas à la couche Γ, ν_x, ν_y, ν_z, τ_x, τ_y, τ_z ont, à l'instant t, des valeurs qui demeurent finies lorsque h tend vers o; d'autre part, le volume total occupé par ces éléments tend vers o lorsque h et dt tendent vers o; nous pouvons donc négliger l'apport de ces éléments et raisonner comme si, dans l'égalité (39), l'intégrale s'étendait à la seule couche Γ.

Soit $M'N' = dS'$ (*fig.* 7) un élément de la surface S'. Par le contour de cet élément, menons des normales $M'M''$, $N'N''$, ... à la surface S'; nous découpons dans la couche Γ un petit volume $M'N'M''N''$.

Sur la normale $M''M'$ prenons deux points infiniment voisins m'', m', et soit dl

Fig. 7.



la distance $m''m'$. Par les points m'', m' menons des surfaces $m''n''$, $m'n'$, parallèles à la surface S'; dans le petit volume considéré, elles découpent un élément

$$d\varpi = m'n'm''n''.$$

En négligeant une quantité dont le rapport à $d\varpi$ s'annule en même temps que h, on peut écrire

$$d\varpi = dl\, dS'.$$

Les valeurs de

$$\frac{\partial\, \delta x}{\partial x}, \quad \frac{\partial\, \delta y}{\partial y}, \quad \frac{\partial\, \delta z}{\partial z},$$

$$\frac{\partial\, \delta z}{\partial y} + \frac{\partial\, \delta y}{\partial z}, \quad \frac{\partial\, \delta x}{\partial z} + \frac{\partial\, \delta z}{\partial x}, \quad \frac{\partial\, \delta y}{\partial x} + \frac{\partial\, \delta x}{\partial y},$$

en un point de l'élément $d\varpi$, ont respectivement pour terme principal, lorsque h tend vers o, les valeurs des mêmes quantités au point M'.

Si donc on pose

$$(40) \quad \begin{cases} N_x = \int_0^h \nu_x\, dl, & N_y = \int_0^h \nu_y\, dl, & N_z = \int_0^h \nu_z\, dl, \\ T_x = \int_0^h \tau_x\, dl, & T_y = \int_0^h \tau_y\, dl, & T_z = \int_0^h \tau_z\, dl, \end{cases}$$

formules qui déterminent les six quantités N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z en chaque point M' de la surface S'; si l'on observe en outre que, lorsque h tend vers o, la surface S' tend à devenir la surface S, et le point M' à devenir un point M de la

surface S, on peut donner à la quantité $d\mathfrak{C}_{va}$ cette forme limite

$$(41)\quad d\mathfrak{C}_{va} = \int_S \left[N_x \frac{\partial\, \delta x}{\partial x} + N_y \frac{\partial\, \delta y}{\partial y} + N_z \frac{\partial\, \delta z}{\partial z} + T_x \left(\frac{\partial\, \delta y}{\partial z} + \frac{\partial\, \delta z}{\partial y} \right) + T_y \left(\frac{\partial\, \delta z}{\partial x} + \frac{\partial\, \delta x}{\partial z} \right) + T_z \left(\frac{\partial\, \delta x}{\partial y} + \frac{\partial\, \delta y}{\partial x} \right) \right] dS.$$

Dans cette formule (41), les quantités N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z sont remplacées par leurs valeurs limites pour $h = 0$.

A l'égard de ces valeurs limites, on peut faire des suppositions diverses, dont voici la première :

Hypothèse A. — *Les quantités*

$$\nu_x, \quad \nu_y, \quad \nu_z, \qquad \tau_x, \quad \tau_y, \quad \tau_z$$

ne croissent pas au delà de toute limite, lorsque les quantités

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z}, \qquad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

croissent au delà de toute limite.

Cette hypothèse, jointe aux égalités (40), montre que N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z tendent vers 0 lorsque h tend vers 0, en sorte que l'égalité (41) devient simplement

$$(42)\qquad d\mathfrak{C}_{va} = 0.$$

Cette hypothèse est assurément vérifiée si l'on suppose le fluide absolument dépourvu de viscosité; hors ce cas, elle est peu vraisemblable, et la suivante paraît plus naturelle :

Hypothèse B. — *Les égalités* [Ire Partie, égalités (51) et (52)]

$$(43)\quad \begin{cases} \nu_x = -\lambda(\rho, T)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - 2\mu(\rho, T)\frac{\partial u}{\partial x}, \\ \nu_y = -\lambda(\rho, T)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - 2\mu(\rho, T)\frac{\partial v}{\partial y}, \\ \nu_z = -\lambda(\rho, T)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - 2\mu(\rho, T)\frac{\partial w}{\partial z}, \\ \tau_x = -\mu(\rho, T)\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \\ \tau_y = -\mu(\rho, T)\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \\ \tau_z = -\mu(\rho, T)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \end{cases}$$

dont l'exactitude est admise lorsque les dérivées partielles de u, v, w, ne surpassent pas certaines limites, demeurent vraies lorsque ces dérivées croissent au delà de toute limite.

Posons

$$(44)\quad \begin{cases} (u_1 - u_2)\,L_x = \displaystyle\int_0^h \lambda(\rho, T)\frac{\partial u}{\partial l}\,dl, & (u_1 - u_2)\,M_x = \displaystyle\int_0^h \mu(\rho, T)\frac{\partial u}{\partial l}\,dl, \\ (v_1 - v_2)\,L_y = \displaystyle\int_0^h \lambda(\rho, T)\frac{\partial v}{\partial l}\,dl, & (v_1 - v_2)\,M_y = \displaystyle\int_0^h \mu(\rho, T)\frac{\partial v}{\partial l}\,dl; \\ (w_1 - w_2)\,L_z = \displaystyle\int_0^h \lambda(\rho, T)\frac{\partial w}{\partial l}\,dl, & (w_1 - w_2)\,M_z = \displaystyle\int_0^h \mu(\rho, T)\frac{\partial w}{\partial l}\,dl. \end{cases}$$

Les quantités L_x, L_y, L_z, M_x, M_y, M_z tendront vers des limites finies lorsque h tendra vers o; ces limites dépendront, d'ailleurs, de la manière dont u, v, w varient avec l.

Nous savons que $\frac{\partial u}{\partial l}$ a le signe de $(u_1 - u_2)$; d'autre part, nous avons [Ire Partie, condition (62 *bis*)]

$$\mu(\rho, T) > 0.$$

L'égalité

$$(u_1 - u_2)M_x = \int_0^h \mu(\rho, T)\frac{\partial u}{\partial l}\,dl$$

nous donne donc la première des conditions

$$(45)\qquad M_x > 0, \qquad M_y > 0, \qquad M_z > 0.$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

Les égalités (44) nous donnent

$$(u_1 - u_2)(L_x + 2M_x) = \int_0^h [\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T)]\frac{\partial u}{\partial l}\,dl.$$

Mais nous avons [Ire Partie, condition (65)]

$$\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T) > 0.$$

Nous obtenons donc la première des conditions

$$(46)\qquad \begin{cases} L_x + 2M_x > 0, \\ L_y + 2M_y > 0, \\ L_z + 2M_z > 0. \end{cases}$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

Les égalités (38), (40) et (42) nous donnent les valeurs limites suivantes pour N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z :

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} N_x &= (L_x + 2M_x)(u_2 - u_1)\alpha + L_y(v_2 - v_1)\beta + L_z(w_2 - w_1)\gamma, \\ N_y &= (L_y + 2M_y)(v_2 - v_1)\beta + L_z(w_2 - w_1)\gamma + L_x(u_2 - u_1)\alpha, \\ N_z &= (L_z + 2M_z)(w_2 - w_1)\gamma + L_x(u_2 - u_1)\alpha + L_y(v_2 - v_1)\beta; \\ T_x &= M_y(v_2 - v_1)\gamma + M_z(w_2 - w_1)\beta, \\ T_y &= M_z(w_2 - w_1)\alpha + M_x(u_2 - u_1)\gamma, \\ T_z &= M_x(u_2 - u_1)\beta + M_y(v_2 - v_1)\alpha. \end{aligned}\right.$$

Il suffit de reporter ces valeurs dans l'égalité (41) pour obtenir l'expression de $d\mathfrak{T}_{va}$ qui correspond à l'hypothèse B.

§ 5. — Cas où un fluide visqueux ne peut propager une onde de choc.

C'est de l'hypothèse B que nous allons, tout d'abord, suivre les conséquences; nous allons montrer que, dans cette hypothèse, aucune onde de choc ne peut se propager au sein d'un fluide visqueux.

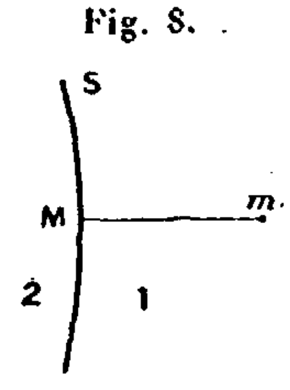
Sur la surface S, faisons choix d'un système de coordonnées curvilignes orthogonales, θ et θ'; l'élément linéaire ds, tracé sur cette surface, sera donné par l'égalité

$$(48)\qquad ds^2 = [\Theta(\theta, \theta')]^2 d\theta^2 + [\Theta'(\theta, \theta')]^2 d\theta'^2.$$

La tangente à la ligne θ ($\theta' = \text{const.}$), menée dans le sens où θ est croissant, fait avec Ox, Oy, Oz des angles dont les cosinus sont λ, μ, ν. La tangente à la ligne θ' ($\theta = \text{const.}$), menée dans le sens où θ' est croissant, fait avec Ox, Oy, Oz des angles dont les cosinus sont λ', μ', ν'.

Un point m, infiniment voisin de la surface S (*fig.* 8), peut être marqué par

Fig. 8.



ses coordonnées x, y, z; mais il peut aussi être marqué par les coordonnées θ, θ' de sa projection orthogonale M sur la surface S et par la longueur n de la projetante Mm, comptée positivement lorsque la direction Mm va du côté 2 au côté 1.

Supposons positives les deux fonctions $\Theta(\theta, \theta')$, $\Theta'(\theta, \theta')$. Nous aurons

$$(49)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial\theta}{\partial x}=\dfrac{\lambda}{\Theta}, & \dfrac{\partial\theta}{\partial y}=\dfrac{\mu}{\Theta}, & \dfrac{\partial\theta}{\partial z}=\dfrac{\nu}{\Theta}, \\ \dfrac{\partial\theta'}{\partial x}=\dfrac{\lambda'}{\Theta'}, & \dfrac{\partial\theta'}{\partial y}=\dfrac{\mu'}{\Theta'}, & \dfrac{\partial\theta'}{\partial z}=\dfrac{\nu'}{\Theta'}, \\ \dfrac{\partial n}{\partial x}=\alpha, & \dfrac{\partial n}{\partial y}=\beta, & \dfrac{\partial n}{\partial z}=\gamma. \end{array}\right.$$

Soit f une grandeur qui a, au point m, une valeur déterminée. On peut l'exprimer soit en fonction de x, y, z, soit en fonction de θ, θ', n, et l'on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial\theta'}\frac{\partial\theta'}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}&=\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial\theta'}\frac{\partial\theta'}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial z}&=\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial\theta'}\frac{\partial\theta'}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial z}, \end{aligned}$$

ou bien, selon les égalités (49),

$$(50)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{\lambda}{\Theta}\frac{\partial f}{\partial\theta}+\frac{\lambda'}{\Theta'}\frac{\partial f}{\partial\theta'}+\alpha\frac{\partial f}{\partial n}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}&=\frac{\mu}{\Theta}\frac{\partial f}{\partial\theta}+\frac{\mu'}{\Theta'}\frac{\partial f}{\partial\theta'}+\beta\frac{\partial f}{\partial n}, \\ \frac{\partial f}{\partial z}&=\frac{\nu}{\Theta}\frac{\partial f}{\partial\theta}+\frac{\nu'}{\Theta'}\frac{\partial f}{\partial\theta'}+\gamma\frac{\partial f}{\partial n}. \end{aligned}\right.$$

On peut, dans ces formules (50), remplacer f par δx, par δy ou par δz, et transformer ainsi l'expression (41) de $d\mathfrak{T}_{va}$. Si nous posons

$$(51)\qquad \left\{\begin{aligned} J_x&=N_x\alpha+T_z\beta+T_y\gamma, \\ J_y&=T_z\alpha+N_y\beta+T_x\gamma, \\ J_z&=T_y\alpha+T_x\beta+N_z\gamma; \\ K_x&=\frac{1}{\Theta}(N_x\lambda+T_z\mu+T_y\nu), \\ K_y&=\frac{1}{\Theta}(T_z\lambda+N_y\mu+T_x\nu), \\ K_z&=\frac{1}{\Theta}(T_y\lambda+T_x\mu+N_z\nu); \\ K'_x&=\frac{1}{\Theta'}(N_x\lambda'+T_z\mu'+T_y\nu'), \\ K'_y&=\frac{1}{\Theta'}(T_z\lambda'+N_y\mu'+T_x\nu'), \\ K'_z&=\frac{1}{\Theta'}(T_y\lambda'+T_x\mu'+N_z\nu'), \end{aligned}\right.$$

l'égalité (41) deviendra

$$\begin{aligned} d\mathfrak{T}_{va} = \int_S \Big(& J_x \frac{\partial \delta x}{\partial n} + J_y \frac{\partial \delta y}{\partial n} + J_z \frac{\partial \delta z}{\partial n} \\ & + K_x \frac{\partial \delta x}{\partial \theta} + K_y \frac{\partial \delta y}{\partial \theta} + K_z \frac{\partial \delta z}{\partial \theta} \\ & + K'_x \frac{\partial \delta x}{\partial \theta'} + K'_y \frac{\partial \delta y}{\partial \theta'} + K'_z \frac{\partial \delta z}{\partial \theta'} \Big) dS \end{aligned}$$

et l'égalité (37) prendra la forme

$$(52) \quad \begin{aligned} \int_S \Big\{ & [(u_2 - u_1)\rho_1 \mathfrak{V}_1 - \mathfrak{P}_{x2} + \mathfrak{P}_{x1}] \delta x \\ & + [(v_2 - v_1)\rho_1 \mathfrak{V}_1 - \mathfrak{P}_{y2} + \mathfrak{P}_{y1}] \delta y \\ & + [(w_2 - w_1)\rho_1 \mathfrak{V}_1 - \mathfrak{P}_{z2} + \mathfrak{P}_{z1}] \delta z \\ & - J_x \frac{\partial \delta x}{\partial n} - J_y \frac{\partial \delta y}{\partial n} - J_z \frac{\partial \delta z}{\partial n} \\ & - K_x \frac{\partial \delta x}{\partial \theta} - K_y \frac{\partial \delta y}{\partial \theta} - K_z \frac{\partial \delta z}{\partial \theta} \\ & - K'_x \frac{\partial \delta x}{\partial \theta'} - K'_y \frac{\partial \delta y}{\partial \theta'} - K'_z \frac{\partial \delta z}{\partial \theta'} \Big\} dS = 0. \end{aligned}$$

Cette égalité doit avoir lieu quelles que soient, dans tout le fluide, les quantités δx, δy, δz.

Or on peut prendre, en tout point de la surface S,

$$\begin{aligned} \delta x &= 0, \quad \text{partant} \quad \frac{\partial \delta x}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \delta x}{\partial \theta'} = 0, \\ \delta y &= 0, \quad \text{partant} \quad \frac{\partial \delta y}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \delta y}{\partial \theta'} = 0, \\ \delta z &= 0, \quad \text{partant} \quad \frac{\partial \delta z}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \delta z}{\partial \theta'} = 0. \end{aligned}$$

Les quantités $\frac{\partial \delta x}{\partial n}$, $\frac{\partial \delta y}{\partial n}$, $\frac{\partial \delta z}{\partial n}$ demeurent néanmoins arbitraires. L'égalité (52) devant toujours avoir lieu, on voit que l'on doit avoir, quels que soient $\frac{\partial \delta x}{\partial n}$, $\frac{\partial \delta y}{\partial n}$, $\frac{\partial \delta z}{\partial n}$,

$$\int_S \left(J_x \frac{\partial \delta x}{\partial n} + J_y \frac{\partial \delta y}{\partial n} + J_z \frac{\partial \delta z}{\partial n} \right) dS = 0.$$

Il revient au même de dire que l'on a, en tout point de la surface S,

$$(53) \qquad J_x = 0, \qquad J_y = 0, \qquad J_z = 0.$$

Si l'on tient compte des égalités (47) et (51), ces égalités (53) deviennent

$$(54)\quad \left\{\begin{aligned} &(u_2 - u_1)[(L_x + 2M_x)\alpha^2 + M_x(\beta^2 + \gamma^2)] \\ &+ (v_2 - v_1)(L_y + M_y)\alpha\beta + (w_2 - w_1)(L_z + M_z)\alpha\gamma = 0, \\ &(v_2 - v_1)[(L_y + 2M_y)\beta^2 + M_y(\gamma^2 + \alpha^2)] \\ &+ (w_2 - w_1)(L_z + M_z)\beta\gamma + (u_2 - u_1)(L_x + M_x)\beta\alpha = 0, \\ &(w_2 - w_1)[(L_z + 2M_z)\gamma^2 + M_z(\alpha^2 + \beta^2)] \\ &+ (u_2 - u_1)(L_x + M_x)\gamma\alpha + (v_2 - v_1)(L_y + M_y)\gamma\beta = 0. \end{aligned}\right.$$

Pour interpréter ces égalités (54), prenons un point quelconque M de la surface S. Prenons pour axe des z la direction n relative à ce point. Nous aurons alors, en ce point,

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 1$$

et, en ce même point, les égalités (54) deviendront

$$\begin{aligned} M_x\ (u_2 - u_1) &= 0, \\ M_y\ (v_2 - v_1) &= 0, \\ (L_z + 2M_z)(w_2 - w_1) &= 0, \end{aligned}$$

ou bien, selon les inégalités (45) et (46),

$$(55)\qquad u_2 - u_1 = 0, \qquad v_2 - v_1 = 0, \qquad w_2 - w_1 = 0.$$

Les égalités (3) et (3 *bis*) donnent alors

$$\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2 = 0,$$

et l'égalité (10) devient

$$(56)\qquad \rho_2 - \rho_1 = 0.$$

Ni la densité, ni les composantes de la vitesse ne subissent de discontinuité au travers de la surface S.

Nous arrivons donc au théorème suivant :

Si l'on regarde comme générales les expressions des actions de viscosité reçues dans le cas où les dérivées partielles des composantes de la vitesse ne surpassent pas certaines limites, aucune onde de choc ne peut se propager dans un fluide visqueux.

§ 6. — Cas où une onde de choc peut se propager dans un fluide.

Suivons maintenant les conséquences de l'hypothèse A.

En vertu de l'égalité (42), l'égalité (37) devient

$$\int_S \Big\{ [(u_2 - u_1)\rho_1 \mathfrak{V}_1 - \mathfrak{P}_{x2} + \mathfrak{P}_{x1}]\,\delta x + [(v_2 - v_1)\rho_1 \mathfrak{V}_1 - \mathfrak{P}_{y2} + \mathfrak{P}_{y1}]\,\delta y + [(w_2 - w_1)\rho_1 \mathfrak{V}_1 - \mathfrak{P}_{z2} + \mathfrak{P}_{z1}]\,\delta z \Big\}\, dS = 0.$$

Pour qu'elle ait lieu, quels que soient δx, δy, δz, il faut et il suffit que l'on ait, en tout point de la surface S,

$$(57)\qquad \begin{cases} \rho_1 \mathfrak{V}_1 (u_2 - u_1) = \mathfrak{P}_{x2} - \mathfrak{P}_{x1}, \\ \rho_1 \mathfrak{V}_1 (v_2 - v_1) = \mathfrak{P}_{y2} - \mathfrak{P}_{y1}, \\ \rho_1 \mathfrak{V}_1 (w_2 - w_1) = \mathfrak{P}_{z2} - \mathfrak{P}_{z1}. \end{cases}$$

Supposons, en particulier, que le fluide ne soit pas visqueux. Alors, selon les égalités (35), nous aurons

$$(58)\qquad \mathfrak{P}_{x1} = \Pi_1 \alpha, \qquad \mathfrak{P}_{y1} = \Pi_1 \beta, \qquad \mathfrak{P}_{z1} = \Pi_1 \gamma,$$

tandis que, selon les égalités (35 *bis*), nous aurons

$$(58\ bis)\qquad \mathfrak{P}_{x2} = \Pi_2 \alpha, \qquad \mathfrak{P}_{y2} = \Pi_2 \beta, \qquad \mathfrak{P}_{z2} = \Pi_2 \gamma.$$

Les égalités (57) deviendront alors

$$(59)\qquad \begin{cases} \rho_1 \mathfrak{V}_1 (u_2 - u_1) = (\Pi_2 - \Pi_1)\alpha, \\ \rho_1 \mathfrak{V}_1 (v_2 - v_1) = (\Pi_2 - \Pi_1)\beta, \\ \rho_1 \mathfrak{V}_1 (w_2 - w_1) = (\Pi_2 - \Pi_1)\gamma. \end{cases}$$

Dans le cas où le fluide n'est pas visqueux, la vitesse u_2, v_2, w_2 s'obtient en composant, avec la vitesse u_1, v_1, w_1, une vitesse normale à la surface S.

Multiplions respectivement les égalités (57) par α, β, γ et ajoutons-les membre à membre, en observant que, selon les égalités (3) et (3 *bis*),

$$(u_2 - u_1)\alpha + (v_2 - v_1)\beta + (w_2 - w_1)\gamma = \mathfrak{V}_2 + \mathfrak{V}_1,$$

tandis que, selon l'égalité

$$(10)\qquad \rho_1 \mathfrak{V}_1 + \rho_2 \mathfrak{V}_2 = 0,$$

on a

$$\mathfrak{V}_2 + \mathfrak{V}_1 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \mathfrak{V}_1 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} \mathfrak{V}_2.$$

Nous trouvons

$$(60) \qquad \frac{\rho_1}{\rho_2}(\rho_2 - \rho_1)\mathfrak{V}_1^2$$
$$= \frac{\rho_2}{\rho_1}(\rho_2 - \rho_1)\mathfrak{V}_2^2 = (\mathfrak{P}_{x2} - \mathfrak{P}_{x1})\alpha + (\mathfrak{P}_{y2} - \mathfrak{P}_{y1})\beta + (\mathfrak{P}_{z2} - \mathfrak{P}_{z1})\gamma.$$

Dans le cas où le fluide n'est pas visqueux, on peut écrire les égalités (58) et (58 *bis*) et l'égalité précédente devient

$$(61) \qquad \frac{\rho_1}{\rho_2}(\rho_2 - \rho_1)\mathfrak{V}_1^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1}(\rho_2 - \rho_1)\mathfrak{V}_2^2 = \Pi_2 - \Pi_1.$$

Cette relation a été donnée par Riemann (¹) dans le cas où la propagation de l'onde et le mouvement du fluide se font partout dans une même direction; elle a été généralisée par M. Jouguet (²).

§ 7. — La relation supplémentaire. Cas des fluides bons conducteurs.

Il ne paraît pas impossible, au premier abord, que la surface S, qui est surface de discontinuité pour la densité, la pression et les composantes de la vitesse, soit également une surface de discontinuité pour la température. Lorsqu'on s'approche d'un point M de la surface S en demeurant du côté 1 de la surface, la température tendrait vers une certaine limite T_1; lorsqu'on s'approche du même point en demeurant du côté 2 de la surface, la température tendrait vers une autre limite T_2.

Pour examiner cette question, nous allons reprendre la considération de la couche de passage Γ, comme au § 4. Cette considération permettra de faire usage des principes établis dans la première Partie de ces recherches (Chap. I, § 6).

A l'intérieur de la couche Γ, la quantité $\frac{\partial T}{\partial l}$ doit être, en général, une quantité très grande de l'ordre de $\frac{1}{h}$, tandis que nous supposerons, comme il nous est loisible de le faire, que toutes les quantités telles que $\frac{\partial T}{\partial s}$ demeurent finies lorsque h tend vers o.

(¹) Riemann, *Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Bd VIII; 1860. — *Riemann's Werke*, p. 145.

(²) E. Jouguet, *Comptes rendus*, t. CXXXII, p. 673; 18 mars 1901.

En dehors de la couche Γ, les quantités $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial T}{\partial y}$, $\frac{\partial T}{\partial z}$ demeurent finies lorsque h tend vers 0.

La quantité de chaleur dégagée, en une modification réelle ou virtuelle, par un élément quelconque du fluide, est donnée par les égalités (83) et (84) de la première Partie de ces Recherches. On en conclut sans peine la proposition suivante :

Dans le temps dt, une partie quelconque du fluide dégage une quantité de chaleur dQ donnée par la formule

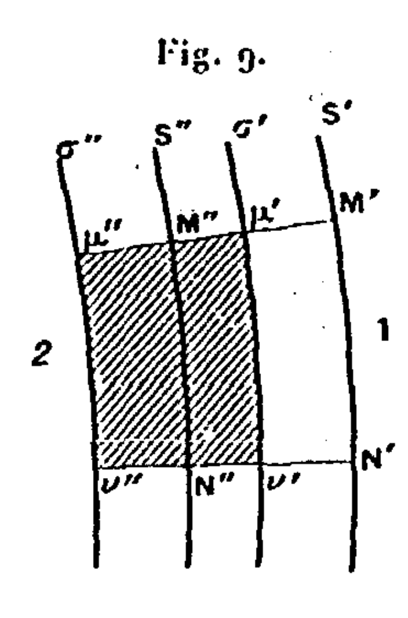
$$(62)\quad E\,dQ = dt\int T\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2}\frac{dT}{dt}\right)dm$$
$$- dt\int\left[\nu_x\frac{\partial u}{\partial x} + \nu_y\frac{\partial v}{\partial y} + \nu_z\frac{\partial w}{\partial z}\right.$$
$$\left. + \tau_x\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \tau_y\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \tau_z\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]d\varpi,$$

les deux intégrations s'étendant à la partie du fluide que l'on considère.

Nous allons appliquer cette égalité (62) à une masse fluide déterminée de la manière suivante :

Entre les deux surfaces S′, S″ (*fig.* 9), partant dans la couche Γ, traçons une

Fig. 9.



surface σ′ parallèle à S′; du côté 2 par rapport à la surface S″, et, partant, en dehors de la couche Γ, menons une autre surface σ″, parallèle à S′; supposons que la distance de la surface σ″ à la surface S′ soit une longueur du même ordre que h.

Sur la surface S′, prenons une aire finie M′N′ = S′; par les divers points du contour de cette aire, menons des normales à la surface S′; sur les surfaces σ′, S″, σ″, ces normales découpent respectivement des aires μ′ν′, M″N″, μ″ν″.

C'est à la masse fluide que renferme, à l'instant t, le volume μ′ν′μ″ν″ que nous allons appliquer la formule (62).

Cette formule va nous donner pour dQ une quantité infiniment petite de l'ordre de dt.

En premier lieu, en effet, la masse à laquelle s'étend la première intégrale, le volume auquel s'étend la seconde sont infiniment petits de l'ordre de dt.

En second lieu, en la première intégrale, la quantité sous le signe $\int$ est finie en tout point de la masse $M''N''\mu''\nu''$; en tout point de la masse $\mu'\nu'M''N''$ elle est, par les quantités $\frac{d\rho}{dt}$, $\frac{dT}{dt}$, très grande de l'ordre de $\frac{1}{h}$.

Enfin, en la seconde intégrale, la quantité sous le signe $\int$ a une valeur finie en tout point du volume $M''N''\mu''\nu''$; en tout point du volume $\mu'\nu'M''N''$ les quantités $\nu_x, \nu_y, \nu_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$ demeurent finies lorsque h tend vers o; cela résulte de l'hypothèse A dont, en ce moment, nous suivons les conséquences; mais les quantités $\frac{\partial u}{\partial x}$, ... sont, en général, infiniment grandes de l'ordre de $\frac{1}{h}$; et il en est de même de la quantité sous le signe $\int$.

On voit donc que dQ est le produit de dt par une quantité qui ne croît pas au delà de toute limite lorsque h tend vers o.

D'autre part, désignons par Ω la surface qui entoure le volume $\mu'\nu'\mu''\nu''$, par $d\Omega$ un élément de cette surface, par N la normale à l'élément $d\Omega$ vers l'extérieur de cette surface fermée, par K le coefficient de conductibilité en un point de l'élément $d\Omega$. Nous aurons

$$dQ = -dt\int_\Omega K\frac{\partial T}{\partial N}d\Omega. \tag{63}$$

$\frac{\partial T}{\partial N}$ a une valeur finie en tout point de la surface $\mu''\nu''$, qui est en entier à l'extérieur de la couche Γ.

Donc, au second membre de l'égalité (63), la partie $\mu''\nu''$ de la surface Ω fournit, si K n'est pas nul, un contingent qui est de l'ordre de dt.

$\frac{\partial T}{\partial N}$ a encore une valeur finie en tous les points de la surface latérale $\mu'\mu''\nu'\nu''$; cela va de soi pour les parties de cette surface qui sont en dehors de la couche Γ; cela est encore vrai pour les parties de cette surface qui sont à l'intérieur de la couche Γ, car alors $\frac{\partial T}{\partial N}$ est une des quantités $\frac{\partial T}{\partial s}$ dont nous avons admis qu'elles demeurent finies lorsque h tend vers o. La considération de la partie latérale $\mu'\mu''\nu'\nu''$ de la surface Ω fournit donc au second membre de l'égalité (63) un terme de l'ordre de $h\,dt$, infiniment petit par rapport au précédent.

Nous voyons donc que, dQ devant être une quantité de l'ordre de dt, l'inté-

grale

$$\int_{\mu'\nu'} K \frac{\partial T}{\partial N} d\Omega$$

devrait demeurer finie lorsque h tend vers o.

Or, si K n'est pas nul, il n'en peut être ainsi, en général, car, le long de la surface $\mu'\nu'$, on a

$$\frac{\partial T}{\partial N} = \frac{\partial T}{\partial l},$$

en sorte que $\frac{\partial T}{\partial N}$ est une quantité infiniment grande de l'ordre de $\frac{1}{h}$.

Nous sommes amenés ainsi à la proposition suivante :

Si le coefficient de conductibilité d'un fluide n'est pas nul, une onde de choc ne peut, au sein de ce fluide, être une surface de discontinuité pour la température.

On a donc, en tout point de la surface S et à tout instant,

(64) $$T_1 = T_2.$$

Appliquons les résultats que nous venons d'obtenir à l'exemple que définissent les conditions suivantes :

1° Le fluide est bon conducteur et dépourvu de viscosité;

2° Les actions tant intérieures qu'extérieures sont *newtoniennes* (¹), c'est-à-dire que l'on a

(65) $$A_e = 0, \quad A_{ia} = 0, \quad A_{ib} = 0.$$

Supposons que l'on se donne en un point M, censé appartenant à une onde de choc :

1° Les éléments du mouvement 1, c'est-à-dire les quantités

$$u_1, \quad v_1, \quad w_1, \quad \rho_1, \quad \Pi_1, \quad T_1,$$

les trois dernières liées par la relation

(66) $$\Pi_1 - \rho_1^2 \frac{\partial \zeta(\rho_1, T_1)}{\partial \rho_1} = 0,$$

qui résulte des relations (22) et (65);

(¹) Pour l'origine de ce mot, voir *Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3ᵉ série, t. X, p. 216; 1893).

2° La direction (α, β, γ) de la normale à l'onde de choc et la valeur $\mathfrak{N}$ de la vitesse de propagation de cette onde.

Nous allons voir qu'au point M on peut déterminer tous les éléments du mouvement 2, c'est-à-dire les quantités

$$u_2, \quad v_2, \quad w_2, \quad \rho_2, \quad \Pi_2, \quad T_2,$$

les trois dernières étant liées par la relation

$$\Pi_2 - \rho_2^2 \frac{\partial \zeta(\rho_2, T_2)}{\partial \rho_2} = 0. \tag{66 bis}$$

L'égalité

$$T_2 = T_1 \tag{64}$$

nous fait d'abord connaître T_2 et transforme l'égalité (66 *bis*) en

$$\Pi_2 - \rho_2^2 \frac{\partial \zeta(\rho_2, T_1)}{\partial \rho_2} = 0. \tag{66 ter}$$

L'égalité

$$\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{N} - (\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1) \tag{3}$$

détermine $\mathfrak{V}_1$.

L'égalité

$$\frac{\rho_2(\Pi_2 - \Pi_1)}{\rho_2 - \rho_1} = \rho_1 \mathfrak{V}_1^2, \tag{61}$$

que l'égalité (66 *ter*) transforme en

$$\frac{\rho_2^3 \dfrac{\partial \zeta(\rho_2, T_1)}{\partial \rho_2} - \rho_2 \Pi_1}{\rho_2 - \rho_1} = \rho_1 \mathfrak{V}_1^2, \tag{67}$$

fait alors connaître ρ_2; l'égalité (66 *ter*) détermine ensuite Π_2.

Enfin, les égalités

$$\left\{ \begin{aligned} u_2 &= u_1 + \frac{\Pi_2 - \Pi_1}{\rho_1 \mathfrak{V}_1} \alpha, \\ v_2 &= v_1 + \frac{\Pi_2 - \Pi_1}{\rho_1 \mathfrak{V}_1} \beta, \\ w_2 &= w_1 + \frac{\Pi_2 - \Pi_1}{\rho_1 \mathfrak{V}_1} \gamma \end{aligned} \right. \tag{59}$$

déterminent u_2, v_2, w_2 et achèvent la solution du problème.

§ 8. — La relation supplémentaire. Cas des fluides mauvais conducteurs.

Nous allons maintenant supposer le fluide dénué de conductibilité, cas auquel la quantité de chaleur dégagée dans le temps dt par une partie quelconque du fluide est égale à o.

Pour établir la relation supplémentaire qu'il convient, dans ce cas, d'écrire en tout point d'une onde de choc, nous allons, tout d'abord, mettre sous une forme particulière l'expression de la quantité de chaleur que dégage, dans le temps dt, une partie du fluide au sein de laquelle les éléments du mouvement ne présentent aucune discontinuité.

Appelons b cette partie, a le reste du fluide, Ω la surface qui limite la partie b, n_i la normale à la surface Ω vers l'intérieur de la partie b.

La quantité de chaleur dQ sera donnée par l'égalité (62), où les intégrations s'étendent à la partie b du fluide. En faisant usage des notations que définissent les égalités (24) et (25), cette égalité peut s'écrire

$$(68)\qquad \begin{aligned} \mathrm{E}\,dQ = &-dt\int_b \mathrm{T}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial\mathrm{T}}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial\mathrm{T}^2}\frac{d\mathrm{T}}{dt}\right)dm \\ &-dt\int_b (q_x u + q_y v + q_z w)\,d\varpi \\ &-dt\int_\Omega (p_x u + p_y v + p_z w)\,d\Omega. \end{aligned}$$

Mais les égalités (21) donnent

$$(69)\qquad \begin{aligned} &-\int_b (q_x u + q_y v + q_z w)\,d\varpi \\ &= -\int_b (\gamma_x u + \gamma_y v + \gamma_z w)\,dm \\ &+\int_b [(\mathrm{X}_{ib} + \mathrm{X}_{ia} + \mathrm{X}_e)u + (\mathrm{Y}_{ib} + \mathrm{Y}_{ia} + \mathrm{Y}_e)v + (\mathrm{Z}_{ib} + \mathrm{Z}_{ia} + \mathrm{Z}_e)w]\,dm \\ &-\int_b \left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}u + \frac{\partial\Pi}{\partial y}v + \frac{\partial\Pi}{\partial z}w\right)d\varpi. \end{aligned}$$

D'ailleurs

$$(70)\qquad \begin{aligned} -\int_b (\gamma_x u + \gamma_y v + \gamma_z w)\,dm &= -\int_b \left(u\frac{du}{dt} + v\frac{dv}{dt} + w\frac{dw}{dt}\right)dm \\ &= -\frac{d}{dt}\int_b \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}\,dm \end{aligned}$$

et

$$(71)\qquad -\int_b\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}u+\frac{\partial\Pi}{\partial y}v+\frac{\partial\Pi}{\partial z}w\right)d\varpi$$
$$=\int_b \Pi\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)d\varpi$$
$$+\int_\Omega \Pi[u\cos(n_i,x)+v\cos(n_i,y)+w\cos(n_i,z)]\,d\Omega.$$

L'égalité bien connue

$$\frac{d\rho}{dt}=-\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

jointe à l'égalité (22), donne

$$(72)\qquad \int_b \Pi\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)d\varpi=\int\left(\Lambda_{ib}+\Lambda_{ia}+\Lambda_e-\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)\frac{d\rho}{dt}\,dm.$$

Si l'on définit les quantités P_x, P_y, P_z par les égalités (23), les égalités (68), (69), (70), (71) et (72) donnent

$$(73)\qquad \mathrm{E}\,dQ=dt\int_\Omega (P_x u+P_y v+P_z w)\,d\Omega$$
$$-dt\frac{d}{dt}\int_b \frac{u^2+v^2+w^2}{2}\,dm$$
$$+dt\int_b\left[\left(T\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}-\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)\frac{d\rho}{dt}+T\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2}\frac{dT}{dt}\right]dm$$
$$+dt\int_b\left(X_e\,u+Y_e\,v+Z_e\,w+\Lambda_e\frac{d\rho}{dt}\right)dm$$
$$+dt\int_b\left(X_{ia}u+Y_{ia}v+Z_{ia}w+\Lambda_{ia}\frac{d\rho}{dt}\right)dm$$
$$+dt\int_b\left(X_{ib}u+Y_{ib}v+Z_{ib}w+\Lambda_{ib}\frac{d\rho}{dt}\right)dm.$$

D'autre part, si l'on pose

$$(74)\qquad \mathrm{E}\,\eta(\rho,T)=\zeta(\rho,T)-T\frac{\partial\zeta(\rho,T)}{\partial T},$$

on aura

$$(75)\qquad \int_b\left[\left(T\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}-\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)\frac{d\rho}{dt}+T\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2}\frac{dT}{dt}\right]dm=-\mathrm{E}\frac{d}{dt}\int_b \eta(\rho,T)\,dm.$$

Enfin, on sait que l'on a

$$(76)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_b \left(X_e u + Y_e v + Z_e w + A_e \frac{d\rho}{dt}\right) dm = -\frac{d}{dt}\int_b V_e\, dm,\\ &\int_b \left(X_{ia} u + Y_{ia} v + Z_{ia} w + A_{ia} \frac{d\rho}{dt}\right) dm = -\frac{d}{dt}\int_b V_{ia}\, dm,\\ &\int_b \left(X_{ib} u + Y_{ib} v + Z_{ib} w + A_{ib} \frac{d\rho}{dt}\right) dm = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_b V_{ib}\, dm. \end{aligned}\right.$$

Les égalités (73), (74), (75), (76) donnent alors

$$(77)\quad \begin{aligned} E\, dQ = {} & dt\int_\Omega (P_x u + P_y v + P_z w)\, d\Omega \\ & - dt\int_b \left[E\eta(\rho, T) + \frac{u^2+v^2+w^2}{2} + V_e + V_{ia} + \tfrac{1}{2}V_{ib}\right] dm. \end{aligned}$$

Cette égalité peut encore se mettre sous une forme un peu différente.

Si f est, à l'instant t, la valeur d'une certaine grandeur en un point de la masse élémentaire dm, nous désignerons par f' la valeur, à l'instant $(t+dt)$, de la même grandeur en un point de la même masse. L'égalité (77) pourra alors s'écrire

$$(78)\quad \begin{aligned} E\, dQ = {} & dt\int_\Omega (P_x u + P_y v + P_z w)\, d\Omega \\ & + \int_b \left[E\eta(\rho, T) + \frac{u^2+v^2+w^2}{2} + V_e + V_{ia} + \tfrac{1}{2}V_{ib} \right. \\ & \qquad \left. - E\eta(\rho', T') - \frac{u'^2+v'^2+w'^2}{2} - V'_e - V'_{ia} - \tfrac{1}{2}V'_{ib}\right] dm. \end{aligned}$$

Cette expression est établie dans l'hypothèse où, au voisinage du temps t, les divers éléments du mouvement varient d'une manière continue pour chacune des masses dm qui composent la partie b.

Nous allons maintenant SUPPOSER *que cette expression demeure exacte pour le cas où, à l'instant t, la partie b est le siège d'une onde de choc* S *qui peut rencontrer la surface* Ω. D'ailleurs, on peut, si l'on veut, considérer cette proposition non comme une hypothèse, mais comme la *définition* de la quantité de chaleur dégagée, dans le temps dt, par une telle partie du fluide.

Toutefois, pour qu'une semblable définition soit admissible, il faut que le sens des termes qui figurent au second membre de l'égalité (78) soit précis; il ne saurait à cet égard y avoir de doute pour le second; mais il n'en est pas de même du premier, car les quantités P_x, P_y, P_z n'ont aucun sens aux divers points de l'intersection des surfaces S et Ω. Nous conviendrons que ce terme doit être cal-

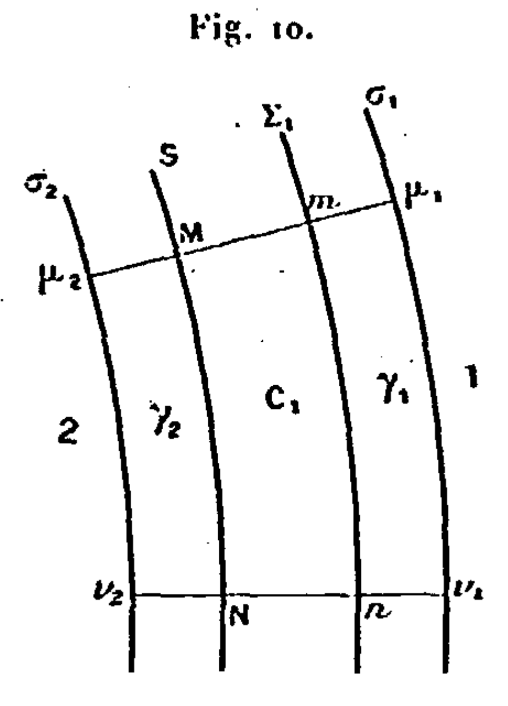
culé comme si les quantités P_x, P_y, P_z prenaient aux divers points de cette ligne des valeurs finies, valeurs qu'il est, dès lors, inutile de connaître.

C'est, d'ailleurs, à cette convention que nous serions conduits si, comme nous l'avons fait à diverses reprises, nous regardions l'onde de choc comme la limite d'une couche de passage d'épaisseur très petite h au sein de laquelle les éléments du mouvement varient d'une manière continue, mais très rapide; si l'on admet en outre l'hypothèse A, ce qui est nécessaire pour qu'une onde de choc puisse se propager, on sait que les valeurs de P_x, P_y, P_z à l'intérieur de la couche ne croissent pas au delà de toute limite lorsque l'épaisseur h de cette couche tend vers o.

Ces préliminaires posés, l'hypothèse, ou mieux la définition qu'exprime l'égalité (78) va être appliquée à une masse b déterminée de la manière suivante :

Reprenons les surfaces S, Σ_1, σ_1, σ_2, qui ont été définies au § 3. Sur la surface S prenons (*fig.* 10) une aire $MN = A$; par les divers points du contour de cette

Fig. 10.



aire, élevons des normales à la surface S; sur les surfaces Σ_1, σ_1, σ_2, elles découpent des aires qui sont respectivement mn, $\mu_1\nu_1$, $\mu_2\nu_2$. La surface $\mu_2\mu'_1\nu_1\nu_2$ sera, ici, la surface Ω; la masse fluide qu'elle contient à l'instant t sera la masse b, composée de trois parties : la partie γ_1, comprise entre les surfaces σ_1, Σ_1; la partie C_1, comprise entre les surfaces Σ_1, S; la partie γ_2, comprise entre les surfaces S, σ_2.

Dans le calcul du second membre de l'égalité (78), nous négligerons les infiniment petits d'ordre supérieur à dt.

La surface Ω se compose de l'aire $\mu_1\nu_1$, de l'aire $\mu_2\nu_2$, enfin de l'aire latérale $\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2$; cette dernière est de l'ordre de dt et comme P_x, P_y, P_z y ont, en tout point, une valeur finie, elle fournit à l'intégrale

$$\int_\Omega (P_x u + P_y v + P_z w)\, d\Omega$$

un contingent de l'ordre de dt et à $\mathrm{E}\,dQ$ un contingent négligeable de l'ordre de dt^2. Il nous suffit donc de considérer les deux parties de cette intégrale qui se rapportent respectivement à l'aire $\mu_1\nu_1$ et à l'aire $\mu_2\nu_2$.

En l'aire $\mu_1\nu_1$, nous avons, aux quantités près de l'ordre de dt,

$$\cos(n_i, x) = -\alpha, \qquad \cos(n_i, y) = -\beta, \qquad (\cos n_i, z) = -\gamma.$$

Si l'on tient compte des égalités (23), (24) et (35), on voit que l'on a, en termes finis,

$$\mathrm{P}_x = -\mathfrak{P}_{x1}, \qquad \mathrm{P}_y = -\mathfrak{P}_{y1}, \qquad \mathrm{P}_z = -\mathfrak{P}_{z1}$$

et qu'en s'en tenant aux termes finis le contingent apporté à notre intégrale par l'aire $\mu_1\nu_1$ est

$$-\int_{\mathrm{A}} (\mathfrak{P}_{x1}u_1 + \mathfrak{P}_{y1}v_1 + \mathfrak{P}_{z1}w_1)\,d\mathrm{S}.$$

En l'aire $\mu_2\nu_2$ on a, en négligeant les infiniment petits de l'ordre de dt,

$$\cos(n_i, x) = \alpha, \qquad \cos(n_i, y) = \beta, \qquad \cos(n_i, z) = \gamma.$$

Les égalités (23), (24) et (35 *bis*) donnent, en n'écrivant que les termes finis,

$$\mathrm{P}_x = \mathfrak{P}_{x2}, \qquad \mathrm{P}_y = \mathfrak{P}_{y2}, \qquad \mathrm{P}_z = \mathfrak{P}_{z2}$$

et l'aire $\mu_2\nu_2$ fournit à notre intégrale le contingent suivant :

$$\int_{\mathrm{A}} (\mathfrak{P}_{x2}u_2 + \mathfrak{P}_{y2}v_2 + \mathfrak{P}_{z2}w_2)\,d\mathrm{S}.$$

On a donc, en se bornant aux termes de l'ordre de dt,

$$(79) \qquad \begin{aligned} &dt\int_{\Omega} (\mathrm{P}_x u + \mathrm{P}_y v + \mathrm{P}_z w)\,d\Omega \\ &= dt\int_{\mathrm{A}} (\mathfrak{P}_{x2}u_2 + \mathfrak{P}_{y2}v_2 + \mathfrak{P}_{z2}w_2 - \mathfrak{P}_{x1}u_1 - \mathfrak{P}_{y1}v_1 - \mathfrak{P}_{z1}w_1)\,d\mathrm{S}. \end{aligned}$$

La masse b se compose des trois parties que nous avons désignées par γ_1, γ_2, C_1.

Les masses élémentaires qui forment la partie γ_1 sont du côté 1 de l'onde de choc aussi bien à l'instant $(t + dt)$ qu'à l'instant t; pour ces masses, la différence qui, dans l'égalité (78), figure sous le signe $\int_b$ est assurément de l'ordre de dt, et comme la masse γ_1 tout entière est, elle aussi, de l'ordre de dt, cette masse fournit à l'intégrale $\int_b$ un contingent de l'ordre de dt^2, partant négligeable; il en est

de même de la masse γ_2, en sorte que nous pouvons supposer notre intégrale étendue non à la masse b, mais à la masse C_1.

Selon les hypothèses faites sur les fonctions V, chacune de ces fonctions est infiniment petite lorsqu'elle provient d'un volume infiniment petit, et cela même lorsque le point auquel elle se rapporte appartient à ce volume. Les deux fonctions V_{ib}, V'_{ib} tendent donc vers o avec dt. Partant, la quantité

$$\frac{1}{2}\int_{C_1}(V_{ib} - V'_{ib})\,dm$$

est infiniment petite par rapport à dt, et il est loisible de l'ajouter à l'intégrale que nous voulons évaluer. Si donc nous posons

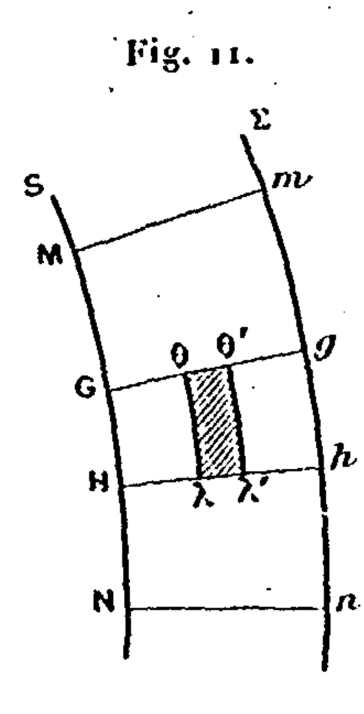
$$(80)\qquad \begin{cases} V = V_e + V_{ia} + V_{ib}, \\ V' = V'_e + V'_{ia} + V'_{ib}, \end{cases}$$

l'intégrale à évaluer pourra s'écrire

$$(81)\qquad \int_{C_1}\left[E\eta(\rho, T) + \frac{u^2+v^2+w^2}{2} + V - E\eta(\rho', T') - \frac{u'^2+v'^2+w'^2}{2} - V'\right]dm.$$

Prenons sur l'aire A (*fig.* 11) un élément $GH = dS$. Par le contour de cet élément, élevons à la surface S des normales qui découpent sur la surface Σ_1 l'élé-

Fig. 11.



ment gh. Dans le volume $GHgh$ découpons un élément $\theta\lambda\theta'\lambda'$ par deux surfaces $\theta\lambda$, $\theta'\lambda'$, parallèles à la surface S, et menées à des distances $G\theta = l$, $G\theta' = l + dl$ de cette surface. Prenons pour masse dm la masse qui, à l'instant t, remplit le volume $\theta\lambda\theta'\lambda'$. A l'instant t, cette masse est du côté 1 de la surface S; sa densité diffère infiniment peu de la densité limite ρ_1 relative au point G, et la valeur principale de dm est

$$dm = \rho_1\,dS\,dl.$$

A l'instant t, cette masse étant du côté 1 de l'onde de choc, on a, aux infiniment petits près,

$$E\eta(\rho, T) + \frac{u^2+v^2+w^2}{2} + V = E\eta(\rho_1, T_1) + \frac{u_1^2+v_1^2+w_1^2}{2} + V_1,$$

les termes du second membre se rapportant au point G et à l'instant t.

A l'instant $(t+dt)$, la même masse est du côté 2 de l'onde de choc; on peut donc écrire de même

$$E\eta(\rho', T') + \frac{u'^2+v'^2+w'^2}{2} + V' = E\eta(\rho_2, T_2) + \frac{u_2^2+v_2^2+w_2^2}{2} + V_2,$$

les termes du second membre se rapportant encore au point G et à l'instant t.

Notre masse dm fournit donc à l'intégrale (81) le terme

$$\rho_1\left[E\eta(\rho_1, T_1) + \frac{u_1^2+v_1^2+w_1^2}{2} + V_1 - E\eta(\rho_2, T_2) - \frac{u_2^2+v_2^2+w_2^2}{2} - V_2\right] dS\, dl.$$

Pour avoir le contingent que le volume GHgh apporte à l'intégrale (81), il suffit d'intégrer l'expression précédente par rapport à l, depuis $l = 0$ jusqu'à $l = Gg = \mathfrak{P}_1\, dt$, ce qui donne

$$\rho_1\mathfrak{P}_1\left[E\eta(\rho_1, T_1) + \frac{u_1^2+v_1^2+w_1^2}{2} + V_1 - E\eta(\rho_2, T_2) - \frac{u_2^2+v_2^2+w_2^2}{2} - V_2\right] dS\, dt.$$

L'intégrale (81) devient

$$dt\int_A \rho_1\mathfrak{P}_1\left[E\eta(\rho_1, T_1) + \frac{u_1^2+v_1^2+w_1^2}{2} + V_1 - E\eta(\rho_2, T_2) - \frac{u_2^2+v_2^2+w_2^2}{2} - V_2\right] dS.$$

Ce résultat, joint à l'égalité (79), donne la forme suivante à l'égalité (78)

$$(82)\quad E\,dQ = dt\int_A \left\{ \begin{aligned} &\rho_1\mathfrak{P}_1\left[E\eta(\rho_1, T_1) + \frac{u_1^2+v_1^2+w_1^2}{2} + V_1\right] - \mathfrak{P}_{x1}u_1 - \mathfrak{P}_{y1}v_1 - \mathfrak{P}_{z1}w_1 \\ &- \rho_1\mathfrak{P}_1\left[E\eta(\rho_2, T_2) + \frac{u_2^2+v_2^2+w_2^2}{2} + V_2\right] + \mathfrak{P}_{x2}u_2 + \mathfrak{P}_{y2}v_2 + \mathfrak{P}_{z2}w_2 \end{aligned} \right\} dS.$$

Si le milieu est mauvais conducteur, cette quantité doit être égale à 0, quelle que soit l'aire A choisie sur la surface S; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on ait, en tout point de la surface S,

$$(83)\quad \begin{aligned} &\rho_1\mathfrak{P}_1\left[E\eta(\rho_1, T_1) + \frac{u_1^2+v_1^2+w_1^2}{2} + V_1\right] - \mathfrak{P}_{x1}u_1 - \mathfrak{P}_{y1}v_1 - \mathfrak{P}_{z1}w_1 \\ &= \rho_1\mathfrak{P}_1\left[E\eta(\rho_2, T_2) + \frac{u_2^2+v_2^2+w_2^2}{2} + V_2\right] - \mathfrak{P}_{x2}u_2 - \mathfrak{P}_{y2}v_2 - \mathfrak{P}_{z2}w_2. \end{aligned}$$

Telle est la condition supplémentaire qui remplace, dans le cas des fluides mauvais conducteurs de la chaleur, la relation (64) relative aux fluides bons conducteurs.

On peut, en la combinant avec les relations déjà trouvées, lui donner une autre forme.

Les égalités

$$(57)\qquad \begin{cases} \rho_1 \mathfrak{V}_1 (u_2 - u_1) = \mathfrak{P}_{x2} - \mathfrak{P}_{x1}, \\ \rho_1 \mathfrak{V}_1 (v_2 - v_1) = \mathfrak{P}_{y2} - \mathfrak{P}_{y1}, \\ \rho_1 \mathfrak{V}_1 (w_2 - w_1) = \mathfrak{P}_{z2} - \mathfrak{P}_{z1}, \end{cases}$$

respectivement multipliées par $\frac{u_2 + u_1}{2}$, $\frac{v_2 + v_1}{2}$, $\frac{w_2 + w_1}{2}$ et ajoutées membre à membre, donnent

$$\rho_1 \mathfrak{V}_1 \left(\frac{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}{2} - \frac{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2}{2} \right)$$
$$= \frac{\mathfrak{P}_{x2} - \mathfrak{P}_{x1}}{2}(u_2 + u_1) + \frac{\mathfrak{P}_{y2} - \mathfrak{P}_{y1}}{2}(v_2 + v_1) + \frac{\mathfrak{P}_{z2} - \mathfrak{P}_{z1}}{2}(w_2 + w_1).$$

L'égalité (83) devient alors

$$\rho_1 \mathfrak{V}_1 [\mathrm{E}\eta(\rho_2, \mathrm{T}_2) + \mathrm{V}_2 - \mathrm{E}\eta(\rho_1, \mathrm{T}_1) - \mathrm{V}_1]$$
$$= \frac{\mathfrak{P}_{x2} + \mathfrak{P}_{x1}}{2}(u_2 - u_1) + \frac{\mathfrak{P}_{y2} + \mathfrak{P}_{y1}}{2}(v_2 - v_1) + \frac{\mathfrak{P}_{z2} + \mathfrak{P}_{z1}}{2}(w_2 - w_1)$$

ou bien, en vertu des égalités (57),

$$\rho_1^2 \mathfrak{V}_1^2 [\mathrm{E}\eta(\rho_2, \mathrm{T}_2) + \mathrm{V}_2 - \mathrm{E}\eta(\rho_1, \mathrm{T}_1) - \mathrm{V}_1] = \frac{\mathfrak{P}_{x2}^2 + \mathfrak{P}_{y2}^2 + \mathfrak{P}_{z2}^2 - \mathfrak{P}_{x1}^2 - \mathfrak{P}_{y1}^2 - \mathfrak{P}_{z1}^2}{2}.$$

Si l'on remplace $\mathfrak{V}_1^2$ par la valeur, tirée de l'égalité (60),

$$\mathfrak{V}_1^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1(\rho_2 - \rho_1)}[(\mathfrak{P}_{x2} - \mathfrak{P}_{x1})\alpha + (\mathfrak{P}_{y2} - \mathfrak{P}_{y1})\beta + (\mathfrak{P}_{z2} - \mathfrak{P}_{z1})\gamma],$$

l'égalité précédente devient

$$(84)\qquad \frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_2 - \rho_1}[\mathrm{E}\eta(\rho_2, \mathrm{T}_2) + \mathrm{V}_2 - \mathrm{E}\eta(\rho_1, \mathrm{T}_1) - \mathrm{V}_1]$$
$$= \frac{\mathfrak{P}_{x2}^2 + \mathfrak{P}_{y2}^2 + \mathfrak{P}_{z2}^2 - \mathfrak{P}_{x1}^2 - \mathfrak{P}_{y1}^2 - \mathfrak{P}_{z1}^2}{(\mathfrak{P}_{x2} - \mathfrak{P}_{x1})\alpha + (\mathfrak{P}_{y2} - \mathfrak{P}_{y1})\beta + (\mathfrak{P}_{z2} - \mathfrak{P}_{z1})\gamma}.$$

C'est la forme que nous voulions obtenir.

Si le fluide est dénué de viscosité, les égalités (35) et (35 *bis*) transforment

l'égalité (84) en

$$(85) \qquad \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_2-\rho_1}[\mathrm{E}\eta(\rho_2,\mathrm{T}_2)+\mathrm{V}_2-\mathrm{E}\eta(\rho_1,\mathrm{T}_1)-\mathrm{V}_1]=\frac{\Pi_1+\Pi_2}{2}.$$

Si, en outre, les actions auxquelles les éléments fluides sont soumis sont *newtoniennes,* la discontinuité de densité qui se produit le long de la surface S n'entraînera aucune discontinuité pour la fonction V; on aura

$$\mathrm{V}_1=\mathrm{V}_2$$

et l'égalité (85) deviendra

$$(86) \qquad \frac{\mathrm{E}\rho_1\rho_2}{\rho_2-\rho_1}[\eta(\rho_2,\mathrm{T}_2)-\eta(\rho_1,\mathrm{T}_1)]=\frac{\Pi_1+\Pi_2}{2}.$$

Cette formule avait été établie par Hugoniot (1) dans l'hypothèse où l'onde de choc était plane; elle a été généralisée par M. E. Jouguet (2).

Bornons-nous à ce cas d'un fluide dénué de viscosité et soumis à des actions newtoniennes. Supposons qu'au point M, où une onde de choc est censée passer à l'instant t, on connaisse :

1° Les éléments du mouvement 1, savoir les quantités

$$u_1, \quad v_1, \quad w_1, \quad \rho_1, \quad \Pi_1, \quad \mathrm{T}_1,$$

les trois dernières étant liées par la relation

$$(66) \qquad \Pi_1-\rho_1^2\frac{\partial\zeta(\rho_1,\mathrm{T}_1)}{\partial\rho_1}=0;$$

2° Les cosinus directeurs α, β, γ de la normale à l'onde de choc et la vitesse $\mathfrak{N}$ de propagation de cette onde.

Montrons qu'au point M, les éléments du mouvement 2 sont déterminés.

L'égalité

$$(3) \qquad \mathfrak{V}_1=\mathfrak{N}-(\alpha u_1+\beta v_1+\gamma w_1)$$

détermine $\mathfrak{V}_1$.

---

(1) Hugoniot, *Mémoire sur la propagation du mouvement dans les corps et spécialement dans les gaz parfaits.* IIe Partie, Chap. V : *Sur les discontinuités qui se manifestent dans la propagation du mouvement.* III. *Cas où la relation entre la pression et la densité dépend des transformations subies par le corps* (*Journal de l'École Polytechnique,* LVIIIe Cahier, p. 80; 1889). — *Voir* aussi Vieille, *Étude sur le rôle des discontinuités dans les phénomènes de propagation* (*Mémorial des Poudres et Salpêtres.* t. X, p. 177).

(2) E. Jouguet, *Comptes rendus,* t. CXXXII, p. 673; 18 mars 1901.

Les égalités

(66 *bis*) $$\Pi_2 - \rho_2^2 \frac{\partial \zeta(\rho_2, T_2)}{\partial \rho_2} = 0,$$

(61) $$\frac{\rho_2(\Pi_2 - \Pi_1)}{\rho_2 - \rho_1} = \rho_1 \mathfrak{V}_1^2$$

et l'égalité (86) déterminent ρ_2, Π_2, T_2; alors les égalités (59) déterminent u_2, v_2, w_2.

§ 9. — Des surfaces le long desquelles deux masses fluides glissent l'une sur l'autre.

Les considérations qui ont été développées dans les paragraphes précédents touchant les ondes de choc impliquent, comme cas particulier, l'étude des surfaces le long desquelles deux masses fluides glissent l'une sur l'autre.

Pour déduire des propositions précédentes celles qui sont relatives à ce cas, il est nécessaire et suffisant d'introduire, dans les égalités obtenues, les conditions

$$\mathfrak{V}_1 = 0, \quad \mathfrak{V}_2 = 0.$$

Dès lors, les résultats obtenus au § 5 nous permettent d'énoncer la proposition suivante :

En un fluide visqueux où l'on regarde les relations (43) *comme entièrement générales* (Hypothèse B), *il ne peut subsister aucune surface le long de laquelle deux couches liquides glissent l'une sur l'autre.*

Il faut toutefois excepter le cas où l'on aurait

$$u_2 = u_1 = 0, \quad v_2 - v_1 = 0, \quad w_2 - w_1 = 0,$$

c'est-à-dire le *cas où les deux couches inégalement denses et peut-être, si le fluide est mauvais conducteur, inégalement chaudes, au lieu de* GLISSER *l'une sur l'autre,* ADHÈRENT *l'une à l'autre.*

Dans ce cas, les égalités (47), qui découlent de l'hypothèse B, transportées dans l'égalité (41), nous donnent l'égalité

(42) $$d\mathfrak{E}_{va} = 0,$$

tout comme si nous avions suivi l'hypothèse A.

Ce cas sera traité ultérieurement d'une manière spéciale (*voir* § 11).

Si nous suivons l'Hypothèse A, nous aurons à faire usage des résultats énoncés au § 6 et aux paragraphes suivants.

Les égalités (57), où nous devrons faire $\vartheta_1 = 0$, nous donneront

$$\mathfrak{P}_{x2} = \mathfrak{P}_{x1}, \qquad \mathfrak{P}_{y2} = \mathfrak{P}_{y1}, \qquad \mathfrak{P}_{z2} = \mathfrak{P}_{z1}. \tag{87}$$

La pression dont

$$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{P}_x &= (\Pi + \nu_x)\alpha + \tau_z\beta + \tau_y\gamma, \\ \mathfrak{P}_y &= \tau_z\alpha + (\Pi + \nu_y)\beta + \tau_x\gamma, \\ \mathfrak{P}_z &= \tau_y\alpha + \tau_x\beta + (\Pi + \nu_z)\gamma \end{aligned} \right. \tag{88}$$

sont les composantes, varie d'une manière continue lorsqu'on traverse la surface le long de laquelle deux masses fluides glissent l'une sur l'autre.

L'égalité (60) devient alors une identité.

Les considérations développées au § 7 gardent leur valeur, en sorte que, *si le fluide est bon conducteur, la température varie d'une manière continue lorsqu'on traverse une surface de glissement.*

Si le fluide est mauvais conducteur, on devra encore écrire la relation (83), mais en y faisant $\vartheta_1 = 0$. Cette relation, où ne figurent plus T_1, T_2, ne nous enseigne rien touchant ces quantités, en sorte qu'*en un fluide mauvais conducteur la température peut éprouver une discontinuité quelconque lorsqu'on traverse une surface de glissement.*

Mais l'égalité (83) devient, en tenant compte des égalités (88),

$$\mathfrak{P}_x(u_2 - u_1) + \mathfrak{P}_y(v_2 - v_1) + \mathfrak{P}_z(w_2 - w_1) = 0. \tag{89}$$

En un fluide mauvais conducteur, la pression dont $\mathfrak{P}_x$, $\mathfrak{P}_y$, $\mathfrak{P}_z$ sont les composantes est normale, en chaque point d'une surface de glissement, à la vitesse relative

$$U = u_2 - u_1, \qquad V = v_2 - v_1, \qquad W = w_2 - w_1 \tag{90}$$

des deux masses fluides qui glissent l'une sur l'autre.

Considérons, en particulier, les fluides non visqueux pour lesquels l'hypothèse A est sûrement exacte.

Pour ces fluides, les égalités (87) se réduisent à

$$\Pi_2 = \Pi_1. \tag{91}$$

Si deux masses d'un fluide non visqueux glissent l'une sur l'autre, la pression ne subit aucune variation brusque lorsque l'on traverse la surface de glissement.

Dans le cas où le fluide n'est pas conducteur, la température peut éprouver une discontinuité quelconque au travers de cette surface; mais, si le fluide est bon conducteur, la température varie d'une manière continue au travers de cette surface.

Tenons-nous à ce dernier cas, et supposons en outre que le fluide soit soumis à des actions newtoniennes. Nous aurons, de part et d'autre de la surface de glissement, à écrire les égalités

$$(66) \qquad \Pi_1 - \rho_1^2 \frac{\partial \zeta(\rho_1, T_1)}{\partial \rho_1} = 0,$$

$$(66\ bis) \qquad \Pi_2 - \rho_2^2 \frac{\partial \zeta(\rho_2, T_2)}{\partial \rho_2} = 0.$$

Mais comme nous avons déjà, en tout point de la surface de glissement,

$$[(91)\ \text{et}\ (64)] \qquad \Pi_1 = \Pi_2, \qquad T_1 = T_2,$$

les égalités (66) et (66 *bis*) nous donneront

$$(92) \qquad \rho_1 = \rho_2.$$

En un fluide non visqueux, bon conducteur de la chaleur et soumis à des actions newtoniennes, la densité varie d'une manière continue au travers d'une surface de glissement.

En résumé, au sein d'un fluide non visqueux, le mouvement peut être discontinu le long de certaines surfaces et, dans l'étude de ces surfaces, deux cas sont à distinguer.

Le premier cas est celui des *ondes de choc*. Dans ce cas, la vitesse relative U, V, W [égalités (90)] des deux masses fluides en contact le long de la surface de discontinuité est, à chaque instant, normale à cette surface, en sorte que l'on peut dire que *la discontinuité est longitudinale;* la pression varie d'une manière discontinue au travers de l'onde; celle-ci ne sépare pas sans cesse les deux mêmes masses fluides; d'un instant à l'autre, elle se propage de certaines parties matérielles à d'autres, et la vitesse de cette propagation dépend, en vertu des égalités (3), (3 *bis*), (10) et (61), des deux relations équivalentes

$$(93) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\mathcal{N} - (\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1) = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\Pi_2 - \Pi_1}{\rho_2 - \rho_1}}, \\ &\mathcal{N} - (\alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma w_2) = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\Pi_1 - \Pi_2}{\rho_1 - \rho_2}}. \end{aligned} \right.$$

Le second cas est celui des *surfaces de glissement*. Dans ce cas, en vertu des égalités (3), (3 *bis*), (8) et (90), la vitesse relative U, V, W vérifie l'égalité

$$U\alpha + V\beta + W\gamma = 0.$$

Elle est, à chaque instant, tangente à la surface de discontinuité; on peut donc dire que *la discontinuité est transversale*. La pression varie d'une manière continue au travers d'une semblable surface. Enfin, cette surface sépare sans cesse les deux mêmes masses fluides.

Ces propositions offrent de remarquables analogies avec celles que nous démontrerons plus loin touchant la propagation des ondes d'un ordre quelconque dans les fluides non visqueux (*voir* Chap. IV).

§ 10. — Les surfaces de discontinuité dans les fluides incompressibles.

Nous avons traité jusqu'ici des fluides compressibles; mais les considérations purement cinématiques du § 1 s'appliquent aussi aux fluides incompressibles. On doit seulement, dans ce cas, écrire sans cesse

$$\rho_1 = \rho_2,$$

en sorte que l'égalité (10) devient

$$\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2 = 0$$

ou bien, selon les égalités (3) et (3 *bis*),

$$(u_2 - u_1)\alpha + (v_2 - v_1)\beta + (w_2 - w_1)\gamma = 0.$$

Cette égalité entraîne la conséquence suivante :

Les seules surfaces de discontinuité que puisse présenter un fluide incompressible sont des surfaces de glissement.

D'ailleurs, la plupart des considérations qui précèdent peuvent être répétées au sujet des fluides incompressibles, à la seule condition de remplacer la fonction $\zeta(\rho, T)$ par une simple fonction de T. On peut donc, pour les surfaces de glissement des fluides incompressibles, maintenir ce qui a été dit au paragraphe précédent.

§ 11. — Des surfaces de discontinuité le long desquelles deux masses fluides adhèrent l'une à l'autre.

Dans tout ce qui précède, nous avons implicitement supposé que l'on n'avait pas à la fois les trois égalités

$$u_1 = u_2, \qquad v_1 = v_2, \qquad w_1 = w_2;$$

en d'autres termes, nous avons supposé que la surface S était, pour les composantes de la vitesse, une surface de discontinuité. Toutefois, au début du § 9, nous avons signalé l'intérêt qu'il y aurait à examiner spécialement le cas où les égalités précédentes seraient simultanément vérifiées. C'est cet examen que nous allons maintenant entreprendre.

Les égalités

$$u_1 = u_2 = u, \qquad v_1 = v_2 = v, \qquad w_1 = w_2 = w,$$

jointes aux égalités (3) et (3 *bis*), donnent

$$(8) \qquad \mathfrak{V}_1 = -\mathfrak{V}_2 = \mathfrak{N} - (\alpha u + \beta v + \gamma w)$$

et l'égalité (10) devient

$$(94) \qquad (\rho_2 - \rho_1)[\mathfrak{N} - (\alpha u + \beta v + \gamma w)] = 0.$$

Comme nous l'avons remarqué au § 9, on a, dans le cas actuel,

$$(42) \qquad d\mathfrak{E}_{va} = 0,$$

même si l'on suit l'hypothèse B; on peut donc, en tout état de cause, appliquer au cas actuel les théorèmes généraux établis aux §§ 6, 7, 8, 9.

Nous voyons alors que les égalités (57) nous donneront sûrement les égalités

$$(87) \qquad \begin{cases} \mathfrak{P}_{x1} = \mathfrak{P}_{x2}, \\ \mathfrak{P}_{y1} = \mathfrak{P}_{y2}, \\ \mathfrak{P}_{z1} = \mathfrak{P}_{z2}. \end{cases}$$

En outre, *si le fluide est bon conducteur,* nous aurons

$$(64) \qquad T_1 = T_2.$$

La considération de l'égalité (94) nous amène à distinguer deux cas.

Premier cas. — *On n'a pas*

$$\mathfrak{N} = \alpha u + \beta v + \gamma w.$$

Dès lors, l'égalité (94) donne

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho.$$

Si le fluide est bon conducteur, on sait que l'on a $T_1 = T_2$. Considérons le cas où le fluide est mauvais conducteur; nous devons, dans ce cas, faire usage de l'égalité (83) en y remplaçant, si le fluide est incompressible, $\eta(\rho, T)$ par une simple fonction de T, $\eta(T)$. La continuité de ρ au travers de la surface S assure celle de V, en sorte que $V_1 = V_2$. Dès lors, l'égalité (83) nous donne

$$\eta(\rho, T_1) = \eta(\rho, T_2)$$

si le fluide est compressible et

$$\eta(T_1) = \eta(T_2)$$

si le fluide est incompressible.

Dans tous les cas, en vertu du *postulat de Helmholtz*, la fonction η est une fonction croissante de T. On doit donc avoir $T_1 = T_2$. Ainsi, que le fluide soit bon ou mauvais conducteur, nous avons

$$T_1 = T_2 = T.$$

Si le fluide est compressible, nous devrons écrire, de part et d'autre de la surface S, l'égalité

$$\text{(22)} \qquad \Pi + \rho^2(A_i + A_e) - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T} = 0.$$

La continuité de ρ au travers de la surface S assure celle de A_i et de A_e; on voit donc que la continuité de ρ et de T assure celle de Π; on a, dès lors,

$$\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi.$$

Donc, en un fluide compressible quelconque, une surface au travers de laquelle les composantes de la vitesse sont continues, et dont la vitesse de déplacement n'est pas donnée par la formule

$$\mathfrak{N} = \alpha u + \beta v + \gamma w,$$

ne peut être surface de discontinuité pour aucun des éléments du mouvement.

Si le fluide est incompressible et non visqueux, les égalités (87) donnent l'égalité (91)

$$\Pi_1 = \Pi_2,$$

en sorte que la conclusion précédente demeure établie. Mais les considérations précédentes ne démontrent pas, pour les fluides incompressibles visqueux, l'im-

possibilité d'une surface au travers de laquelle u, v, w, ρ, T varieraient d'une manière continue, qui serait surface de discontinuité pour la pression Π, et dont la vitesse de déplacement ne serait pas donnée par la formule

$$\mathfrak{N} = \alpha u + \beta v + \gamma w.$$

Cette impossibilité sera démontrée plus loin (Chap. III, § 1). Anticipant sur cette démonstration, nous pouvons énoncer la proposition que voici :

En aucun fluide on ne peut observer une surface au travers de laquelle les composantes de la vitesse varieraient d'une manière continue, qui serait surface de discontinuité pour l'un au moins des autres éléments du mouvement (ρ, Π, T) *et dont la vitesse de déplacement ne serait pas donnée par la formule*

$$\mathfrak{N} = \alpha u + \beta v + \gamma w. \tag{8}$$

Nous sommes amenés ainsi à considérer le deuxième cas.

DEUXIÈME CAS. — *On a*

$$\mathfrak{N} = \alpha u + \beta v + \gamma w. \tag{8}$$

Dans ce cas la surface S sépare toujours les deux mêmes parties du fluide, qui *adhèrent* entre elles le long de cette surface.

Pour pousser plus loin l'étude de ce cas, nous aurons à distinguer entre les fluides non visqueux et les fluides visqueux.

Fluides non visqueux. — Les égalités (87) se transforment alors en

$$\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi. \tag{91}$$

Si, en outre, le fluide est bon conducteur, on a

$$T_1 = T_2 = T. \tag{64}$$

Si le fluide considéré est un fluide incompressible, tous les éléments du mouvement varient d'une manière continue au travers de la surface S.

Si le fluide est compressible, l'égalité (22) permet d'écrire

$$\Pi_1 + \rho_1^2 (A_i + A_e)_1 - \rho_1^2 \frac{\partial \zeta(\rho_1, T_1)}{\partial \rho_1} = 0,$$

$$\Pi_2 + \rho_2^2 (A_i + A_e)_2 - \rho_2^2 \frac{\partial \zeta(\rho_2, T_2)}{\partial \rho_2} = 0$$

et, par conséquent, en vertu des égalités (91) et (64),

$$\rho_1^2\left[(A_i+A_e)_1-\frac{\partial\zeta(\rho_1,T)}{\partial\rho_1}\right]=\rho_2^2\left[(A_i+A_e)_2-\frac{\partial\zeta(\rho_2,T)}{\partial\rho_2}\right].$$

Selon des notations précédemment introduites (Ire Partie, Chap. I, § 4), cette égalité peut s'écrire, en remarquant que les fonctions $\mathcal{A}_i(R, x, y, z, t)$, $\mathcal{A}_e(R, x, y, z, t)$ varient d'une manière continue lorsque le point (x, y, z) traverse la surface S,

$$\begin{aligned}\rho_1^2&\left[\mathcal{A}_i(\rho_1, x, y, z, t)+\mathcal{A}_e(\rho_1, x, y, z, t)-\frac{\partial\zeta(\rho_1,T)}{\partial\rho_1}\right]\\&=\rho_2^2\left[\mathcal{A}_i(\rho_2, x, y, z, t)+\mathcal{A}_e(\rho_2, x, y, z, t)-\frac{\partial\zeta(\rho_2,T)}{\partial\rho_2}\right].\end{aligned}$$

Cette égalité est évidemment satisfaite si $\rho_2=\rho_1$; peut-elle l'être autrement? Regardons cette égalité comme une équation en ρ_2.

Elle admet sûrement la racine $\rho_2=\rho_1$.

Pour qu'elle pût en admettre une autre, il faudrait qu'il existât une valeur R de ρ telle que l'on ait

$$\begin{aligned}&2R\left[\mathcal{A}_i(R, x, y, z, t)+\mathcal{A}_e(R, x, y, z, t)-\frac{\partial\zeta(R,T)}{\partial R}\right]\\&+R^2\left[\frac{\partial\mathcal{A}_i(R, x, y, z, t)}{\partial R}+\frac{\partial\mathcal{A}_e(R, x, y, z, t)}{\partial R}-\frac{\partial^2\zeta(R,T)}{\partial R^2}\right]=0.\end{aligned}$$

Or, au sein d'un fluide en équilibre stable, on a (¹)

$$\begin{aligned}&2\rho\left[\mathcal{A}_i(\rho, x, y, z, t)+\mathcal{A}_e(\rho, x, y, z, t)-\frac{\partial\zeta(\rho,T)}{\partial\rho}\right]\\&+\rho^2\left[\frac{\partial\mathcal{A}_i(\rho, x, y, z, t)}{\partial\rho}+\frac{\partial\mathcal{A}_e(\rho, x, y, z, t)}{\partial\rho}-\frac{\partial^2\zeta(\rho,T)}{\partial\rho^2}\right]<0.\end{aligned}$$

Si nous admettons que cette inégalité demeure vraie, quel que soit le mouvement du fluide étudié et quelle que soit la valeur R *de la densité que nous substituions à* $\rho(x, y, z, t)$, *ce qui est assuré dans le cas où les actions intérieures sont newtoniennes,* l'égalité précédente ne pourra pas avoir lieu; nous aurons forcément

$$\rho_2=\rho_1$$

et nous pourrons énoncer le théorème suivant :

(¹) *Sur la stabilité d'une masse fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles* [*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. III, p. 174; condition (63); 1897].

Dans un fluide non visqueux, bon conducteur, incompressible, ou compressible mais soumis à des actions intérieures qui sont newtoniennes, si deux parties du fluide adhèrent le long d'une certaine surface, cette surface n'introduit de discontinuité dans aucun des éléments du mouvement. Il en est encore de même dans le cas où les actions intérieures ne sont pas newtoniennes, pourvu que la condition énoncée il y a un instant soit vérifiée.

Supposons maintenant que le fluide soit mauvais conducteur.

En vertu des égalités (8) et (87), l'égalité (83) devient une identité; entre les températures T_1, T_2 peut exister une différence quelconque; si le fluide est compressible, les égalités (22) et (91) exigent que les densités ρ_1, ρ_2 soient liées par la relation

$$\rho_1^2\left[(A_i+A_e)_1 - \frac{\partial\zeta(\rho_1, T_1)}{\partial\rho_1}\right] = \rho_2^2\left[(A_i+A_e)_2 - \frac{\partial\zeta(\rho_2, T_2)}{\partial\rho_2}\right].$$

Au sein d'un fluide non visqueux, mauvais conducteur, la température peut être discontinue au travers d'une certaine surface qui n'est pas, pour les composantes de la vitesse, une surface de discontinuité; si le fluide est compressible, la densité varie aussi d'une manière discontinue au travers de cette surface; mais la pression, en toute circonstance, y demeure continue.

Fluides visqueux. — Supposons d'abord le fluide bon conducteur

$$T_1 = T_2. \tag{64}$$

Si le fluide était incompressible, tous les éléments du mouvement, sauf la pression Π, seraient continus au travers de la surface S; il résulte alors d'une démonstration qui sera donnée au Chapitre III, § 1, que la pression Π serait également continue; donc :

Au sein d'un fluide visqueux, bon conducteur et incompressible, une surface le long de laquelle adhèrent deux masses fluides ne peut être surface de discontinuité pour aucun des éléments du mouvement.

Si le fluide est compressible, la même impossibilité n'existe plus. La surface d'adhérence peut être surface de discontinuité pour la densité ρ et la pression Π.

Si le fluide est mauvais conducteur, les égalités (8) et (87) transforment l'égalité (83) en une identité; la température et la pression peuvent être discontinues le long de la surface d'adhérence; il en est de même de la densité si le fluide est compressible.

Donc, en résumé, *au sein d'un fluide visqueux, la surface d'adhérence de deux masses peut être :*

1° *Surface de discontinuité pour la densité* ρ *et la pression* Π, *si le fluide est compressible et bon conducteur;*

2° *Surface de discontinuité pour la pression* Π *et la température* T, *si le fluide est incompressible et mauvais conducteur;*

3° *Surface de discontinuité pour la densité* ρ, *la pression* Π *et la température* T, *si le fluide est compressible et mauvais conducteur.*

CHAPITRE II.

LA MÉTHODE D'HUGONIOT.

§ I. — Définitions diverses. Les deux lemmes d'Hugoniot.

Nous avons étudié, au Chapitre précédent, les propriétés des surfaces le long desquelles les éléments du mouvement d'un fluide, c'est-à-dire les six quantités

$$u, \quad v, \quad w, \quad \rho, \quad \Pi, \quad T,$$

sont discontinus. Dorénavant, nous supposerons que, dans la région étudiée, et pendant le laps de temps considéré, ils demeurent continus. Mais, dans cette région et pendant ce laps de temps, chacun de ces éléments peut se composer de plusieurs fonctions analytiques différentes. De là découlent divers problèmes qui seront examinés aux deux Chapitres suivants. Au présent Chapitre sera exposée la méthode propre à traiter ces problèmes.

Considérons une certaine région de l'espace et un certain laps de temps. Soient $u_1(x, y, z, t)$, $u_2(x, y, z, t)$ deux fonctions analytiques uniformes définies en tous les points (x, y, z) de cette région et à tous les instants t de ce laps de temps.

Supposons qu'à l'instant t une certaine surface S soit tracée dans la région considérée et qu'elle partage cette région en deux parties 1 et 2.

Supposons que cette surface S jouisse, à l'instant t, des propriétés suivantes :

Sur la surface S, les deux fonctions u_1, u_2 sont égales entre elles; il en est de même de deux dérivées partielles correspondantes quelconques de ces deux fonctions par rapport aux variables x, y, z, t, jusqu'aux dérivées partielles de l'ordre $(n-1)$ inclusivement; mais il existe au moins une dérivée partielle d'ordre n de la fonction u_1 qui, sur la surface S, n'est pas égale à la dérivée partielle correspondante de la fonction u_2.

Une fonction $u(x, y, z, t)$, égale à $u_1(x, y, z, t)$ dans la région 1, et

à $u_2(x, y, z, t)$ dans la région 2, est continue, mais non analytique, dans la région totale considérée; on dit qu'*à l'instant t, cette fonction $u(x, y, z, t)$ admet la surface S pour onde d'ordre n.*

En particulier, à l'instant t, la surface S sera une onde du premier ordre pour la fonction $u(x, y, z, t)$ si, en tout point de la surface S et à l'instant t, on a

$$u_1 = u_2,$$

tandis que l'une au moins des quatre égalités

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial z} = \frac{\partial u_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t}$$

est inexacte sur la surface S et à l'instant t.

De même, la surface S sera, à l'instant t, une onde du second ordre pour la fonction $u(x, y, z, t)$ si l'on a, en tout point de cette surface et à tout instant, les cinq égalités

$$u_1 = u_2,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial z} = \frac{\partial u_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t},$$

tandis qu'il existe au moins une dérivée partielle du second ordre de la fonction u_1 qui, à l'instant t et sur la surface S, n'est pas égale à la dérivée partielle correspondante de la fonction u_2.

Une surface le long de laquelle la fonction u serait discontinue pourrait, à ce point de vue, être regardée comme une onde d'ordre o.

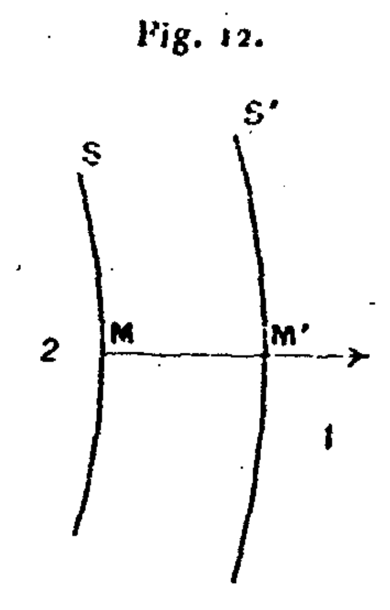
Lorsque nous mènerons à une telle surface une normale, nous la dirigerons du côté 2 vers le côté 1 et nous désignerons par α, β, γ les cosinus des angles que cette direction fait avec Ox, Oy, Oz.

Il arrivera souvent qu'aux divers instants t d'un certain laps de temps on pourra faire correspondre une surface S variable avec t et qu'à chacun de ces instants t la surface S sera une onde d'ordre n pour la fonction $u(x, y, z, t)$; on dira alors que cette surface variable avec t représente une *onde persistante.*

Soient S, S' (*fig.* 12) les positions respectives d'une telle onde aux instants t et $(t + dt)$. Par un point M de la surface S, menons une normale à cette surface;

cette normale rencontre en M′ la surface S′; désignons par δ la longueur MM′,

Fig. 12.



comptée positivement si la direction MM′ va du côté 2 au côté 1, et négativement dans le cas contraire; posons enfin :

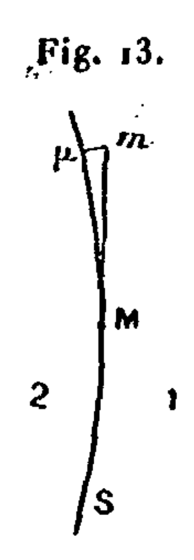
$$\delta = \mathfrak{N}\, dt.$$

$\mathfrak{N}$ sera la *vitesse normale du déplacement de l'onde.*

L'étude des ondes de divers ordres d'une fonction repose sur deux lemmes à la fois très simples et très féconds. Ces deux lemmes ont été donnés par Hugoniot qui en a tiré, touchant la Mécanique, de remarquables conséquences ([1]).

Soit M un point d'une surface S qui est, à l'instant t, pour la fonction u, une

Fig. 13.



onde du premier ordre (*fig.* 13). Soient a, b, c trois quantités finies assujetties seulement à la relation

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0 \tag{95}$$

et ε une quantité infiniment petite. Par le point M, menons un segment Mm dont

(1) HUGONIOT, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4ᵉ série, t. III, 1887, p. 477.

les composantes soient εa, εb, εc; ce segment sera tangent en M à la surface S.

Les deux fonctions u_1, u_2 étant analytiques dans la partie de l'espace que l'on considère, on peut écrire

$$\frac{u_1(M) - u_1(m)}{\varepsilon} = \frac{\partial u_1}{\partial x} a + \frac{\partial u_1}{\partial y} b + \frac{\partial u_1}{\partial z} c + \varepsilon \theta_1,$$
$$\frac{u_2(M) - u_2(m)}{\varepsilon} = \frac{\partial u_2}{\partial x} a + \frac{\partial u_2}{\partial y} b + \frac{\partial u_2}{\partial z} c + \varepsilon \theta_2,$$

les dérivées partielles du second membre se rapportant au point M et les quantités θ_1, θ_2 demeurant finies lorsque ε tend vers o.

Retranchons ces égalités membre à membre en observant que

$$u_1(M) = u_2(M);$$

nous trouvons l'égalité

$$(96) \qquad \frac{u_1(m) - u_2(m)}{\varepsilon} + \varepsilon(\theta_1 - \theta_2)$$
$$= \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x}\right) a + \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) b + \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial u_1}{\partial z}\right) c.$$

Projetons normalement le point M en μ sur la surface S; *si la courbure de la surface* S *au point* M' *n'est pas infiniment grande,* la distance $m\mu$ est un infiniment petit du second ordre par rapport à ε. Alors les fonctions u_1, u_2 étant analytiques, on peut écrire

$$u_1(m) = u_1(\mu) + \varepsilon^2 \varphi_1,$$
$$u_2(m) = u_2(\mu) + \varepsilon^2 \varphi_2,$$

φ_1, φ_2 demeurant finis lorsque ε tend vers o.

Si l'on observe en outre que

$$u_1(\mu) = u_2(\mu),$$

on voit que la relation (96) devient

$$\varepsilon(\varphi_1 - \varphi_2 + \theta_1 - \theta_2) = \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x}\right) a + \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) b + \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial u_1}{\partial z}\right) c.$$

Le premier membre tend vers o avec ε; le second ne dépend pas de ε; il doit

donc être nul. L'égalité

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x}\right) a + \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) b + \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial u_1}{\partial z}\right) c = 0$$

est donc une conséquence de l'égalité (95).

Pour cela, il faut et il suffit qu'il existe une grandeur l telle que l'on ait, quels que soient a, b, c, l'égalité

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x} - \alpha l\right) a + \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y} - \beta l\right) b + \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial u_1}{\partial z} - \gamma l\right) c = 0.$$

D'où la proposition suivante, qui est le PREMIER LEMME D'HUGONIOT :

Soit S *une surface qui est, à l'instant* t, ONDE DU PREMIER ORDRE *pour la fonction* u. *A chaque point de cette surface où la courbure n'est pas infinie correspond une grandeur* l *telle que*

$$(97)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial x} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x} = \alpha l, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial y} - \dfrac{\partial u_1}{\partial y} = \beta l, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial z} - \dfrac{\partial u_1}{\partial z} = \gamma l. \end{cases}$$

Supposons maintenant que la surface S soit, pour la fonction u, une *onde du premier ordre persistante;* soient S sa position à l'instant t et S' sa position à un instant t', voisin de t. Par un point M de la surface S menons une normale à cette surface; cette normale rencontre en M' la surface S'. Si les coordonnées du point M sont x, y, z et si les coordonnées du point M' sont x', y', z', on a, par définition de la vitesse $\mathfrak{N}$,

$$\begin{aligned} \frac{x'-x}{t'-t} &= \mathfrak{N}\alpha + \varphi(t'-t), \\ \frac{y'-y}{t'-t} &= \mathfrak{N}\beta + \psi(t'-t), \\ \frac{z'-z}{t'-t} &= \mathfrak{N}\gamma + \chi(t'-t), \end{aligned}$$

les quantités φ, ψ, χ demeurant finies lorsque $(t'-t)$ tend vers o.

D'autre part, la fonction u_1 étant analytique, on aura

$$\frac{u_1(\mathrm{M}', t') - u_1(\mathrm{M}, t)}{t'-t} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{x'-x}{t'-t} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{y'-y}{t'-t} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{z'-z}{t'-t} + \theta_1(t'-t),$$

θ_1 ne croissant pas au delà de toute limite lorsque $(t'-t)$ tend vers o, et les dérivées partielles se rapportant au point M et à l'instant t.

Ces diverses égalités permettent d'écrire

$$\frac{u_1(M', t') - u_1(M, t)}{t' - t} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\alpha + \frac{\partial u_1}{\partial y}\beta + \frac{\partial u_1}{\partial z}\gamma\right)\mathfrak{N} + \eta_1(t' - t),$$

η_1 ne croissant pas au delà de toute limite lorsque $(t' - t)$ tend vers o.

On a de même

$$\frac{u_2(M', t') - u_2(M, t)}{t' - t} = \frac{\partial u_2}{\partial t} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\alpha + \frac{\partial u_2}{\partial y}\beta + \frac{\partial u_2}{\partial z}\gamma\right)\mathfrak{N} + \eta_2(t' - t),$$

η_2 ne croissant pas au delà de toute limite lorsque $(t' - t)$ tend vers o.

Retranchons membre à membre ces deux égalités, en observant que

$$u_1(M, t) = u_2(M, t), \qquad u_1(M', t') = u_2(M', t')$$

et en tenant compte des égalités (97). Nous trouvons

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial t} + \mathfrak{N} l = (\eta_1 - \eta_2)(t' - t).$$

Le second membre de cette égalité tend vers o avec $(t' - t)$; le premier, qui ne dépend pas de $(t' - t)$, doit être nul; d'où le DEUXIÈME LEMME D'HUGONIOT :

Soit une fonction u qui admet une ONDE PERSISTANTE DU PREMIER ORDRE; *à chaque instant et en tout point de l'onde relative à cet instant, pourvu qu'en ce point la courbure de l'onde ne soit pas infiniment grande, on a l'égalité*

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial t} + \mathfrak{N} l = 0. \tag{98}$$

On observera que les deux lemmes précédents demeureraient vrais au cas où les trois variables x, y, z seraient remplacées par un nombre quelconque de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

§ 2. — EXPRESSION DE LA VITESSE DE DÉPLACEMENT $\mathfrak{N}$ POUR LES ONDES DE DIVERS ORDRES [1].

Les lemmes précédents suffisent à résoudre le problème suivant :

Une fonction u admet une onde persistante d'ordre n; au moyen des déri-

---

[1] *Sur le théorème d'Hugoniot et quelques théorèmes analogues* (*Comptes rendus*, t. CXXXI, 24 décembre 1900, p. 1171).

vées partielles d'ordre n des fonctions u_1, u_2, former une expression de la vitesse de déplacement $\mathfrak{N}$ qui demeure invariable par un changement de coordonnées rectangulaires.

1° *Onde du premier ordre.* — Les égalités (97) et (98) donnent les trois relations

$$(99)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{N}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x}\right) &= -\left(\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\alpha, \\ \mathfrak{N}\left(\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) &= -\left(\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\beta, \\ \mathfrak{N}\left(\frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial u_1}{\partial z}\right) &= -\left(\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\gamma. \end{aligned}\right.$$

Élevons au carré les deux membres de chacune de ces égalités et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons la formule

$$(100)\qquad \mathfrak{N}^2\left\{\left[\frac{\partial(u_2-u_1)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial(u_2-u_1)}{\partial y}\right]^2 + \left[\frac{\partial(u_2-u_1)}{\partial z}\right]^2\right\} = \left[\frac{\partial(u_2-u_1)}{\partial t}\right]^2$$

qui résout, pour les ondes du premier ordre, la question posée.

2° *Onde du second ordre.* — Une telle onde est onde du premier ordre pour la fonction $\frac{\partial u}{\partial x}$ et aussi pour la fonction $\frac{\partial u}{\partial t}$; à chacune de ces deux fonctions appliquons la première des égalités (99); nous trouvons les deux égalités

$$\mathfrak{N}\frac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial x\,\partial t}\alpha,$$

$$\mathfrak{N}\frac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial x\,\partial t} = -\frac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial t^2}\alpha.$$

Multipliées membre à membre, elles donnent la première des égalités

$$\mathfrak{N}^2\frac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial t^2}\alpha^2,$$

$$\mathfrak{N}^2\frac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial t^2}\beta^2,$$

$$\mathfrak{N}^2\frac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial t^2}\gamma^2.$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

En ajoutant membre à membre ces égalités, nous trouvons la relation

$$\mathfrak{N}^2 \Delta(u_2 - u_1) = \frac{\partial^2 (u_2 - u_1)}{\partial t^2}, \tag{101}$$

qui résout, pour les ondes du second ordre, le problème posé.

Cette relation est due à Hugoniot (¹).

3° *Onde d'ordre pair :* $n = 2q$. — Désignons par Δ_q le résultat de l'opération Δ répétée q fois de suite. Nous allons prouver que l'on a

$$\mathfrak{N}^n \Delta_q(u_2 - u_1) = \frac{\partial^n (u_2 - u_1)}{\partial t^n}. \tag{102}$$

L'égalité (101) nous montre que cette formule est exacte lorsqu'on fait $q = 1$ et, partant, $n = 2$; pour en établir la généralité, il nous suffit de prouver que, si elle est vraie jusqu'à une certaine valeur de q et, partant, de n, elle demeure encore vraie lorsqu'on augmente q d'une unité et, partant, n de deux unités.

En d'autres termes, il s'agit de prouver que si la formule (102) est exacte pour toutes les ondes d'ordre pair jusqu'à l'ordre $n = 2q$, on a, pour toute onde d'ordre $(n + 2)$,

$$\mathfrak{N}^{n+2} \Delta_{q+1}(u_2 - u_1) = \frac{\partial^{n+2} (u_2 - u_1)}{\partial t^{n+2}}. \tag{102 bis}$$

Une onde d'ordre $(n + 2)$ pour la fonction u est une onde d'ordre 2 pour la fonction $\Delta_q u$; on a donc, selon la formule (101),

$$\mathfrak{N}^2 \Delta_{q+1}(u_2 - u_1) = \frac{\partial^2 \Delta_q(u_2 - u_1)}{\partial t^2}.$$

Une onde d'ordre $(n + 2)$ pour la fonction u est une onde d'ordre n pour la fonction $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$; on a donc, selon la formule (102),

$$\mathfrak{N}^n \Delta_q \frac{\partial^2 (u_2 - u_1)}{\partial t^2} = \frac{\partial^{n+2} (u_2 - u_1)}{\partial t^{n+2}}.$$

Enfin

$$\frac{\partial^2 \Delta_q(u_2 - u_1)}{\partial t^2} = \Delta_q \frac{\partial^2 (u_2 - u_1)}{\partial t^2}.$$

Ces trois égalités justifient l'égalité (102 *bis*).

(¹) Hugoniot, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4ᵉ série, t. III, 1887, p. 477.

4° *Onde d'ordre impair :* $n = 2q+1$. — Une onde d'ordre $(2q+1)$ pour la fonction u est du premier ordre pour la fonction $\Delta_q u$; on a donc, selon la formule (100),

$$\mathfrak{N}^2\left\{\left[\frac{\partial\,\Delta_q(u_2-u_1)}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial\,\Delta_q(u_2-u_1)}{\partial y}\right]^2+\left[\frac{\partial\,\Delta_q(u_2-u_1)}{\partial z}\right]^2\right\}=\left[\frac{\partial\,\Delta_q(u_2-u_1)}{\partial t}\right]^2.$$

Cette onde est en même temps d'ordre $2q$ par rapport à la fonction $\frac{\partial u}{\partial t}$, en sorte que la formule (102) donne

$$\mathfrak{N}^{2q}\,\Delta_q\frac{\partial(u_2-u_1)}{\partial t}=\frac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial t^n}.$$

Enfin

$$\frac{\partial\,\Delta_q(u_2-u_1)}{\partial t}=\Delta_q\frac{\partial(u_2-u_1)}{\partial t}.$$

Ces trois égalités nous donnent la formule

$$(103)\qquad \mathfrak{N}^{2n}\left\{\left[\frac{\partial\,\Delta_q(u_2-u_1)}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial\,\Delta_q(u_2-u_1)}{\partial y}\right]^2+\left[\frac{\partial\,\Delta_q(u_2-u_1)}{\partial z}\right]^2\right\}=\left[\frac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial t^n}\right]^2$$

qui achève de résoudre le problème posé.

On voit de suite que ces formules conduiraient presque immédiatement à la solution du problème suivant, que nous nous bornerons à énoncer :

Donner de la vitesse $\mathfrak{N}$, pour les ondes de divers ordres, une expression qui ne varie pas par un changement quelconque de coordonnées curvilignes orthogonales.

§ 3. — Applications diverses de la méthode d'Hugoniot.

Avant d'appliquer la méthode d'Hugoniot aux questions d'Hydrodynamique faisons usage des formules précédentes pour étudier diverses équations aux dérivées partielles que l'on rencontre en Physique mathématique.

La première que nous considérerons, avec Hugoniot (¹), est l'équation

$$(104)\qquad a^2\,\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

(¹) Hugoniot, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4ᵉ série, t. III, 1887, p. 477.

où a est une constante réelle, que l'on rencontre dans l'étude des petits mouvements des fluides; la comparaison des égalités (101) et (104) montre de suite que si une intégrale de cette équation offre une onde du second ordre, cette onde se déplace avec une vitesse

$$\mathfrak{N} = \pm a. \tag{105}$$

Ce résultat s'étend d'ailleurs à toutes les ondes d'ordre supérieur à 2 que pourrait présenter une intégrale de l'équation (104). En effet, une onde d'ordre n $(n > 2)$ pour la fonction u est du deuxième ordre pour la fonction $\frac{\partial^{n-2} u}{\partial t^{n-2}}$; et, d'autre part, cette fonction vérifie encore une équation de la forme (104), comme on le voit en différentiant $(n - 2)$ fois par rapport à t les deux membres de l'équation (104).

Des considérations semblables [1] s'appliquent à *l'équation des télégraphistes :*

$$a^2 \Delta u - \mu \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{106}$$

où a et μ sont deux constantes réelles. En tout point d'une onde du second ordre pour la fonction u, on a

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t},$$

en sorte que l'équation (106) exige que l'on ait, en un tel point,

$$a^2 \Delta (u_2 - u_1) = \frac{\partial^2 (u_2 - u_1)}{\partial t^2}.$$

La comparaison de cette égalité avec l'égalité (101) montre que la vitesse de déplacement d'une onde du second ordre pour une intégrale de l'équation (106) est encore donnée par l'égalité (105).

Comme dans le cas précédent, ce résultat s'étend aux ondes d'ordre supérieur à 2.

Il peut arriver que les formules du § 2 conduisent à attribuer à $\mathfrak{N}^2$, pour les ondes d'un certain ordre, une valeur infinie ou négative; dans ce cas, nous sommes certains qu'une intégrale de l'équation considérée n'admet pas d'onde persistante de l'ordre considéré.

---

[1] *Sur l'interprétation théorique des expériences hertziennes* (*L'Éclairage électrique*, t. IV, 1895, p. 494).

Ainsi, en tout point d'une onde du second ordre pour la fonction u, on a

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t};$$

une intégrale de l'équation

(107)
$$\Delta u = \mu \frac{\partial u}{\partial t},$$

que l'on rencontre dans la théorie de la conductibilité, ne pourrait donc admettre une onde du second ordre sans que l'on eût, en tous les points de cette onde,

$$\Delta(u_2 - u_1) = 0,$$

partant, selon l'égalité (101),

$$\mathfrak{N}^2 = \infty.$$

Une intégrale de l'équation

(108)
$$a^2 \Delta u + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

ne pourrait admettre une onde du second ordre sans que l'on eût, en vertu de l'égalité (101),

$$\mathfrak{N}^2 = - a^2.$$

Les intégrales des deux équations (107), (108) ne sauraient donc admettre d'onde persistante du second ordre; cette proposition s'étend sans peine aux ondes d'ordre supérieur à 2 et fournit le théorème suivant :

Si, de part et d'autre d'une surface S *qui peut varier avec* t, *deux fonctions analytiques* u_1, u_2 *vérifient soit l'équation* (107), *soit l'équation* (108), *et si l'on a, en tout point de la surface* S *et à tout instant,*

$$u_1 = u_2,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial z} = \frac{\partial u_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t},$$

les deux fonctions u_1, u_2 *se prolongent analytiquement l'une l'autre.*

L'équation

(109)
$$a^2 \frac{\partial}{\partial t} \Delta u - \mu \Delta u - \mu' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

se rencontre dans l'étude de la propagation de l'électricité au sein des corps con-

ducteurs [1] et dans l'étude des petits mouvements des fluides compressibles visqueux [2]. Imaginons qu'une intégrale de cette équation admette une onde du troisième ordre. Nous aurons, en tout point de cette onde,

$$\Delta(u_2 - u_1) = 0, \qquad \frac{\partial^2(u_2 - u_1)}{\partial t^2} = 0,$$

partant

$$\Delta \frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial t} = 0.$$

D'autre part, cette onde du troisième ordre pour la fonction u serait du premier ordre pour la fonction Δu; si elle était persistante, on aurait, en vertu des égalités (97) et (98),

$$\mathfrak{N} \frac{\partial}{\partial x} \Delta(u_2 - u_1) = -\alpha \frac{\partial}{\partial t} \Delta(u_2 - u_1) = -\alpha \Delta \frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial t}$$

et, partant,

$$\mathfrak{N} = 0.$$

Une intégrale de l'équation (109) ne peut donc admettre d'onde persistante du troisième ordre [3], ni, comme on le prouverait sans peine, d'onde persistante d'ordre plus élevé, à moins que cette onde ne soit immobile.

Une intégrale de l'équation de Laplace

$$\Delta u = 0, \tag{110}$$

où u est une fonction des seules variables x, y, z, à l'exclusion de t, peut-elle admettre une onde du second ordre? Appliquée immédiatement, l'égalité (101) devient une identité; mais on peut remarquer que les théorèmes précédents sont encore vrais si, au lieu des trois variables x, y, z, la fonction étudiée ne dépend que de deux variables x, y; qu'en remplaçant dans l'équation précédente la lettre z par la lettre t, elle devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

---

[1] *Sur l'interprétation théorique des expériences hertziennes* (*L'Éclairage électrique*, t. IV, 1895, p. 494).

[2] *Sur la généralisation d'un théorème de Clebsch* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. VI, 1900, p. 213).

[3] *Sur la théorie électrodynamique de Helmholtz et la théorie électromagnétique de la lumière* (*Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles*, 2e série, t. V, 1901, p. 227).

et que, si une intégrale de cette équation admettait une onde persistante du second ordre, la formule (101) donnerait, pour cette onde,

$$\mathfrak{M}^2 = -1,$$

ce qui est impossible.

Le même procédé conduit, sans aucune difficulté, à la démonstration de la proposition suivante :

Une intégrale de l'équation aux dérivées partielles d'ordre $2n$

$$\Delta_n u + A\frac{\partial^{2n-1} u}{\partial x^{2n-1}} + B\frac{\partial^{2n-1} u}{\partial x^{2n-2}\partial y} + \ldots + Lu = 0, \tag{111}$$

où A, B, ..., L *sont des fonctions des seules variables* x, y, z, *analytiques dans tout l'espace, et où* u *est une fonction des seules variables* x, y, z, *n'admet ni onde d'ordre* n, *ni onde d'ordre supérieur à* n.

Ce théorème entraîne l'impossibilité d'ondes dont l'ordre serait égal ou supérieur à 2 non seulement pour les intégrales de l'équation de Laplace, mais encore pour les intégrales de l'équation

$$\Delta u + k^2 u = 0, \tag{112}$$

que l'on rencontre dans l'étude des mouvements vibratoires des fluides et dans une foule de questions d'Acoustique, d'Optique ou d'Électrodynamique.

Il démontre l'impossibilité d'ondes d'ordre égal ou supérieur à 4 pour les intégrales de l'équation

$$\Delta\Delta u = 0, \tag{113}$$

que l'on rencontre dans l'étude des corps élastiques isotropes en équilibre.

§ 4. — Les paramètres de M. Hadamard.

Les deux lemmes d'Hugoniot, énoncés et démontrés au § 1, peuvent être étendus aux ondes d'ordre n sous une forme très remarquable qui a été indiquée par M. Hadamard [1].

Supposons que la surface S soit, à l'instant t, onde d'ordre n pour la fonction u; elle est évidemment onde d'ordre 1 pour la fonction $\frac{\partial^{(n-1)} u}{\partial x^a \partial y^b \partial z^c \partial t^p}$, où

$$a + b + c = n - p - 1.$$

[1] J. Hadamard, *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXX, p. 50, 19 décembre 1900.

A cette fonction appliquons le premier terme d'Hugoniot, qu'expriment les égalités (97); nous aurons les égalités

$$\frac{\dfrac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^{a+1}\partial y^b\partial z^c\partial t^p}}{\alpha}=\frac{\dfrac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^a\partial y^{b+1}\partial z^c\partial t^p}}{\beta}=\frac{\dfrac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^a\partial y^b\partial z^{c+1}\partial t^p}}{\gamma}$$

que l'on peut encore écrire

$$\frac{\dfrac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^{a+1}\partial y^b\partial z^c\partial t^p}}{\alpha^{a+1}\beta^b\gamma^c}=\frac{\dfrac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^a\partial y^{b+1}\partial z^c\partial t^p}}{\alpha^a\beta^{b+1}\gamma^c}=\frac{\dfrac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^a\partial y^b\partial z^{c+1}\partial t^p}}{\alpha^a\beta^b\gamma^{c+1}}.$$

Le rapport

$$\frac{\dfrac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^{a+1}\partial y^b\partial z^c\partial t^p}}{\alpha^{a+1}\beta^b\gamma^c}$$

prend donc, en un point donné de l'onde, une valeur qui ne change pas lorsqu'au numérateur on remplace une dérivation par rapport à x par une dérivation par rapport à y ou par une dérivation par rapport à z, pourvu qu'en même temps, au dénominateur, on remplace un facteur α par un facteur β ou par un facteur γ.

Cela posé, considérons la fonction

$$\frac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^i\partial y^j\partial z^k\partial t^p},$$

où i, j, k ont des valeurs entières et non négatives qui vérifient la relation

(114) $$i+j+k=n-p.$$

Cette fonction peut se déduire de la fonction

$$\frac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^{n-p}\partial t^p}$$

en remplaçant j fois de suite une différentiation par rapport à x par une différentiation par rapport à y et k fois de suite une différentiation par rapport à x par une différentiation par rapport à z.

Nous arrivons ainsi, au théorème suivant :

Premier lemme de M. Hadamard. — *Si la fonction u admet à l'instant t la surface S pour onde d'ordre n, en chaque point de cette onde le rapport*

$$\frac{\dfrac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^i\partial y^j\partial z^k\partial t^p}}{\alpha^i\beta^j\gamma^k},$$

où les indices i, j, k peuvent prendre toutes les valeurs entières et non négatives qui vérifient l'égalité

$$i + j + k = n - p,$$

a une valeur l_p qui dépend de p, mais point de i, j, k.

Ce lemme peut donc encore s'énoncer de la manière suivante :

A chaque point de la surface S *correspondent $(n+1)$ paramètres*

$$l_0,\quad l_1,\quad \ldots,\quad l_n,$$

au moyen desquels toutes les dérivées partielles d'ordre de la différence $(u_2 - u_1)$ s'expriment, en ce point, par les formules

$$(115)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^i\,\partial y^j\,\partial z^k} = \alpha^i\beta^j\gamma^k l_0 \qquad (i+j+k=n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^i\,\partial y^j\,\partial z^k\,\partial t^p} = \alpha^i\beta^j\gamma^k l_p \qquad (i+j+k=n-p), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x\,\partial t^{n-1}} = \alpha l_{n-1}, \qquad \dfrac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial y\,\partial t^{n-1}} = \beta l_{n-1}, \qquad \dfrac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial z\,\partial t^{n-1}} = \gamma l_{n-1}, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial t^n} = l_n. \end{array} \right.$$

Supposons maintenant que la surface S soit, pour la fonction u, une onde *persistante* d'ordre n. Prenons un point sur cette surface ; en ce point, les trois quantités α, β, γ, ne peuvent être nulles à la fois ; pour fixer les idées, supposons α différent de o.

L'onde considérée est une onde persistante du premier ordre pour la fonction

$$\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-p-1}\,\partial t^p}.$$

A cette fonction appliquons la seconde égalité (99), qui découle du second lemme d'Hugoniot ; nous trouvons

$$(116)\qquad \mathfrak{N}\,\frac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^{n-p}\,\partial t^p} + \alpha\,\frac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^{n-p-1}\,\partial t^{p+1}} = 0.$$

Mais les égalités (115) donnent

$$\frac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^{n-p}\,\partial t^p} = \alpha^{n-p} l_p,$$

$$\frac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^{n-p-1}\,\partial t^{p+1}} = \alpha^{n-p-1} l_{p+1}.$$

Moyennant ces égalités, et après suppression du facteur α^{n-p} qui n'est pas nul, l'égalité (116) prend la forme

$$l_{p+1} + \mathfrak{N} l_p = 0 \tag{117}$$

qui entraîne la proposition suivante :

Second lemme de M. Hadamard. — *Si la surface* S *est, pour la fonction u, une onde persistante d'ordre n, les* $(n+1)$ *paramètres*

$$l_0, \quad l_1, \quad \ldots, \quad l_n$$

forment, en chaque point de cette onde et à chaque instant, une progression géométrique de raison $-\mathfrak{N}$.

On peut donner ([1]) des paramètres

$$l_0, \quad l_1, \quad \ldots, \quad l_n$$

des expressions, formées au moyen des dérivées partielles d'ordre n de la différence $(u_2 - u_1)$, expressions qui ne changent pas par un changement quelconque de coordonnées rectangulaires.

Deux cas sont à distinguer :

Premier cas : $(n-p)$ *est pair,*

$$n - p = 2q. \tag{118}$$

Visiblement, nous avons, pour une fonction f quelconque,

$$\Delta_q f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)^{(q)},$$

la puissance qui figure au second membre étant une puissance symbolique. Il en résulte que

$$\Delta_q \frac{\partial^p (u_2 - u_1)}{\partial t^p} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^p (u_2 - u_1)}{\partial t^p} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial^p (u_2 - u_1)}{\partial t^p} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\partial^p (u_2 - u_1)}{\partial t^p}\right]^{(q)}.$$

Les égalités (115) transforment sans peine cette égalité en

$$\Delta_q \frac{\partial^p (u_2 - u_1)}{\partial t^p} = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^q \, l_p$$

([1]) *Sur les théorèmes d'Hugoniot, les lemmes de M. Hadamard et la propagation des ondes dans les fluides visqueux* (*Comptes rendus*, t. CXXXII, 13 mai 1901, p. 1163).

ou bien, comme $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, en

$$(119) \qquad l_p=\frac{\partial^p}{\partial t^p}\Delta_q(u_2-u_1),$$

formule qui résout la question proposée.

Deuxième cas : *$(n-p)$ est impair,*

$$(120) \qquad n-p=2q+1.$$

Dans ce cas, on a

$$\Delta_q\frac{\partial^{p+1}(u_2-u_1)}{\partial x\,\partial t^p}$$
$$=\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^{p+1}(u_2-u_1)}{\partial x\,\partial t^p}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial^{p+1}(u_2-u_1)}{\partial y\,\partial t^p}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\partial^{p+1}(u_2-u_1)}{\partial z\,\partial t^p}\right]^{(q)}.$$

Selon les égalités (115), cette égalité devient

$$\Delta_q\frac{\partial^{p+1}(u_2-u_1)}{\partial x\,\partial t^p}=\alpha(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^q l_p$$

et donne la première des égalités

$$\alpha\, l_p=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^p\Delta_q(u_2-u_1)}{\partial t^p},$$
$$\beta\, l_p=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^p\Delta_q(u_2-u_1)}{\partial t^p},$$
$$\gamma\, l_p=\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^p\Delta_q(u_2-u_1)}{\partial t^p}.$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

Si l'on élève au carré ces trois égalités et qu'on ajoute membre à membre les résultats obtenus, on trouve la formule

$$(121) \qquad l_p^2=\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^p\Delta_q(u_2-u_1)}{\partial t^p}\right]^2+\left[\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^p\Delta_q(u_2-u_1)}{\partial t^p}\right]^2+\left[\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^p\Delta_q(u_2-u_1)}{\partial t^p}\right]^2$$

qui résout la question posée.

L'égalité (117) nous permet d'écrire, en vertu de la dernière égalité (115),

$$(122) \qquad (-\mathfrak{N})^{n-p}\,l_p=\frac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial t^n}.$$

Si $(n-p)$ est pair,

$$(118) \qquad n-p=2q,$$

les égalités (119) et (122) donnent la relation

$$(123) \qquad \mathfrak{N}^{n-p} \frac{\partial^p}{\partial t^p} \Delta_q(u_2 - u_1) = \frac{\partial^n (u_2 - u_1)}{\partial t^n}.$$

Si $(n-p)$ *est impair,*

$$(120) \qquad n - p = 2q + 1,$$

les égalités (121) et (122) donnent

$$(124) \quad \mathfrak{N}^{2(n-p)} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^p \Delta_q(u_2 - u_1)}{\partial t^p} \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^p \Delta_q(u_2 - u_1)}{\partial t^p} \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^p \Delta_q(u_2 - u_1)}{\partial t^p} \right]^2 \right\} = \left[\frac{\partial^n (u_2 - u_1)}{\partial t^n} \right]^2.$$

Ces égalités (123) et (124) redonnent immédiatement les formules démontrées au § 2. En effet, si n est pair, l'égalité (118) est vérifiée lorsqu'on y fait $p = 0$, et l'égalité (123) reproduit l'égalité (102); si n est impair, l'égalité (120) est vérifiée lorsqu'on y fait $p = 0$, et l'égalité (124) reproduit l'égalité (103).

§ 5. — Onde qui propage un vecteur. — Vecteurs de M. Hadamard.

Supposons que les trois fonctions

$$u(x, y, z, t), \quad v(x, y, z, t), \quad w(x, y, z, t)$$

soient les trois composantes d'un vecteur V. Si la surface S est, à l'instant t, onde d'ordre n pour l'une au moins des trois fonctions u, v, w et si, pour les deux autres, elle est onde d'ordre n ou d'ordre supérieur à n, ou enfin d'ordre infini, cas auquel elle n'interrompt pas le caractère analytique de ces deux fonctions, on dit que *la surface* S *est, à l'instant t, onde d'ordre n pour le vecteur* V.

La notion de *permanence* de l'onde s'étend sans peine à ce cas.

Si la surface S est onde d'ordre n pour le vecteur V, les dérivées partielles d'ordre n de la fonction $(u_2 - u_1)$ s'expriment toutes par les égalités (115), au moyen des $(n+1)$ paramètres $l_0, l_1, \ldots, l_n$; les dérivées partielles d'ordre n de la fonction $(v_2 - v_1)$ s'expriment de même au moyen de $(n+1)$ paramètres m_0, $m_1, \ldots, m_n$; enfin les dérivées partielles d'ordre n de la fonction $(w_2 - w_1)$ s'expriment de même au moyen de $(n+1)$ paramètres $n_0, n_1, \ldots, n_n$.

Mais les paramètres l_p, m_p, n_p peuvent être regardés comme les trois composantes d'un vecteur W_p. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Si, à l'instant t, la surface S *est onde d'ordre n pour le vecteur* V, *il*

existe, en chaque point de cette surface, $(n+1)$ *vecteurs*

$$W_0, \quad W_1, \quad \ldots, \quad W_n,$$

au moyen desquels s'expriment, en ce point et à cet instant, les dérivées partielles d'ordre n *des composantes de la différence géométrique* $V_2 - V_1$.

Supposons maintenant que l'onde soit persistante. Les égalités (117) nous donneront les relations

$$l_{p+1} + \mathfrak{N} l_p = 0, \qquad m_{p+1} + \mathfrak{N} m_p = 0, \qquad n_{p+1} + \mathfrak{N} n_p = 0,$$

qui entraînent la proposition suivante :

Si la surface S *est une onde permanente d'ordre* n *pour le vecteur* V, *à chaque instant et en chaque point de cette onde, les* $(n+1)$ *vecteurs* W_0, $W_1, \ldots, W_n$ *sont dirigés suivant une même droite; si on les compte positivement suivant une direction* D *choisie sur cette droite, ils forment une progression géométrique de raison* $(-\mathfrak{N})$.

La direction D se nomme alors *direction de la perturbation propagée par l'onde* S; lorsqu'elle est sans cesse normale à l'onde S, on dit que celle-ci propage une *perturbation longitudinale;* lorsqu'elle est sans cesse tangente à l'onde S, on dit que celle-ci propage une *perturbation transversale.*

Les considérations contenues en ce dernier paragraphe sont dues en entier à M. Hadamard.

CHAPITRE III.

DES ONDES DANS LES FLUIDES VISQUEUX.

§ I. — Des ondes du premier ordre par rapport a certains éléments du mouvement [1].

Imaginons qu'en un fluide visqueux une surface σ soit, à l'instant t, onde au moins du premier ordre pour les trois composantes u, v, w de la vitesse, pour la température T et, en outre, si le fluide est compressible, pour la densité.

[1] *Sur les théorèmes d'Hugoniot, les lemmes de M. Hadamard et la propagation des ondes dans les fluides visqueux* (*Comptes rendus*, t. CXXXII, 13 mai 1901, p. 1163). *Des ondes qui peuvent persister en un fluide visqueux* (*Ibid.*, t. CXXXIII, 14 octobre 1901, p. 579).

Quant à la pression Π, nous ne la contraindrons pas à varier d'une manière continue au travers de la surface considérée.

Cette onde pourra-t-elle être persistante?

Pour discuter cette question, nous n'avons pas le droit de faire usage des équations du mouvement des fluides visqueux, telles qu'elles sont données par les équations (74) de la première Partie; celles-ci, en effet, reposent sur une transformation qui a été exposée en cette première Partie, au § 3 du Chapitre I, et la légitimité de cette transformation, comme nous l'avons formellement observé en cet endroit, est subordonnée à une condition : c'est que les six quantités $\nu_x, \nu_y, \nu_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$ soient continues dans tout le fluide et admettent, en tous les points de ce fluide, des dérivées partielles finies.

Or, si nous admettons pour $\nu_x, \nu_y, \nu_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$ les expressions données par les égalités (51) de la première Partie ou (43) de la seconde Partie, nous voyons que ces six quantités sont précisément discontinues le long de l'onde σ.

Nous devons donc renoncer à imposer à la quantité $d\mathfrak{F}_\nu$, donnée par l'égalité (46) de la première Partie, la transformation que nous lui avions fait subir et chercher à la transformer d'une autre manière.

Traçons dans le fluide, à l'instant t, une surface fermée Σ contenant la surface σ à son intérieur; soit a la masse fluide que renferme la surface σ, et soit b la masse fluide qui lui est extérieure.

La quantité $d\mathfrak{F}_\nu$ peut toujours s'exprimer ainsi

$$(125) \qquad d\mathfrak{F}_\nu = d\mathfrak{F}_{\nu a} + d\mathfrak{F}_{\nu b},$$

$d\mathfrak{F}_{\nu a}$, $d\mathfrak{F}_{\nu b}$ étant définis par les égalités

$$(126) \qquad d\mathfrak{F}_{\nu a} = \int_a \left[\nu_x \frac{\partial\, \delta x}{\partial x} + \ldots + \tau_z \left(\frac{\partial\, \delta x}{\partial y} + \frac{\partial\, \delta y}{\partial x}\right)\right] d\varpi,$$

$$(127) \qquad d\mathfrak{F}_{\nu b} = \int_b \left[\nu_x \frac{\partial\, \delta x}{\partial x} + \ldots + \tau_z \left(\frac{\partial\, \delta x}{\partial y} + \frac{\partial\, \delta y}{\partial x}\right)\right] d\varpi.$$

Au sein de la partie b, les six quantités $\nu_x, \nu_y, \nu_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$ sont continues et admettent des dérivées partielles qui sont finies; on peut donc appliquer à $d\mathfrak{F}_{\nu b}$ la transformation que, dans la première Partie, nous avons fait subir à la quantité $d\mathfrak{F}_\nu$ tout entière.

Conservons à $p_x, p_y, p_z, q_x, q_y, q_z$ la signification que donnent les égalités (48) et (49) de la première Partie; en chaque point de la surface Σ désignons par n_b la normale vers l'intérieur de la partie b; posons

$$(128) \qquad \begin{cases} \pi_x = -[\nu_x \cos(n_b, x) + \tau_z \cos(n_b, y) + \tau_y \cos(n_b, z)], \\ \pi_y = -[\tau_z \cos(n_b, x) + \nu_y \cos(n_b, y) + \tau_y \cos(n_b, z)], \\ \pi_z = -[\tau_y \cos(n_b, x) + \tau_x \cos(n_b, y) + \nu_z \cos(n_b, z)], \end{cases}$$

et les égalités (125) et (127) nous permettront d'écrire

$$(129)\qquad d\mathfrak{T}_v = d\mathfrak{T}_{va} + \int_b (q_x\,\delta x + q_y\,\delta y + q_z\,\delta z)\,d\varpi$$
$$+ \int_S (p_x\,\delta x + p_y\,\delta y + p_z\,\delta z)\,dS$$
$$+ \int_\Sigma (\pi_x\,\delta x + \pi_y\,\delta y + \pi_z\,\delta z)\,d\Sigma.$$

Choisissons la surface Σ d'une manière particulière.

De part et d'autre de la surface σ menons deux surfaces dont la distance h à la surface Σ soit infiniment petite; l'une de ces surfaces, Σ_1, se trouvera du côté 1 de la surface σ; l'autre, Σ_2, se trouvera du côté 2. Nous composerons la surface Σ de l'ensemble des deux surfaces Σ_1 et Σ_2; nous écrirons l'égalité (129) et nous y ferons tendre h vers 0.

Le volume occupé par la masse a du fluide tend vers 0 avec h; dès lors, il résulte de l'égalité (126) que $d\mathfrak{T}_{va}$ tend vers 0; de plus, au second membre de l'égalité (129), le second terme tend vers l'intégrale

$$\int (q_x\,\delta x + q_y\,\delta y + q_z\,\delta z)\,d\varpi,$$

étendue au volume entier occupé par le fluide; à ce même second membre le troisième terme ne varie pas avec h; il nous reste donc à chercher la forme limite du terme

$$(130)\qquad \int_\Sigma (\pi_x\,\delta x + \pi_y\,\delta y + \pi_z\,\delta z)\,d\Sigma.$$

Cette intégrale se partage en deux autres intégrales analogues, l'une relative à la surface Σ_1, l'autre relative à la surface Σ_2.

Chaque élément $d\Sigma_1$ de la surface Σ_1 a pour limite un élément $d\sigma$ de la surface σ; les quantités $\cos(n_b, x)$, $\cos(n_b, y)$, $\cos(n_b, z)$ relatives au premier ont pour limites respectives les quantités α, β, γ relatives au second; les quantités ν_x, ν_y, ν_z, τ_x, τ_y, τ_z ont pour limites respectives ν_{x1}, ν_{y1}, ν_{z1}, τ_{x1}, τ_{y1}, τ_{z1}. Si donc on pose

$$(131)\qquad \begin{cases} \pi_{x1} = \nu_{x1}\alpha + \tau_{z1}\beta + \tau_{y1}\gamma, \\ \pi_{y1} = \tau_{z1}\alpha + \nu_{y1}\beta + \tau_{x1}\gamma, \\ \pi_{z1} = \tau_{y1}\alpha + \tau_{x1}\beta + \nu_{z1}\gamma, \end{cases}$$

la partie de l'intégrale (130) qui se rapporte à la surface Σ_1 aura pour limite

$$-\int_\sigma (\pi_{x1}\,\delta x + \pi_{y1}\,\delta y + \pi_{z1}\,\delta z)\,d\sigma.$$

Si l'on pose de même

$$(131\ bis)\quad \begin{cases} \pi_{x2} = \nu_{x2}\alpha + \tau_{z2}\beta + \tau_{y2}\gamma, \\ \pi_{y2} = \tau_{z2}\alpha + \nu_{y2}\beta + \tau_{x2}\gamma, \\ \pi_{z2} = \tau_{y2}\alpha + \tau_{x2}\beta + \nu_{z2}\gamma, \end{cases}$$

la partie de l'intégrale (130) qui provient de la surface Σ_2 aura pour limite

$$\int_\sigma (\pi_{x2}\,\delta x + \pi_{y2}\,\delta y + \pi_{z2}\,\delta z)\,d\sigma.$$

On pourra donc écrire, en observant que les quantités δx, δy, δz doivent être continues même au travers de la surface σ,

$$(132)\quad \begin{aligned} d\mathfrak{E}_v = & \int (q_x\,\delta x + q_y\,\delta y + q_z\,\delta z)\,d\varpi \\ & + \int_S (p_x\,\delta x + p_y\,\delta y + p_z\,\delta z)\,dS \\ & + \int_\sigma [(\pi_{x2} - \pi_{x1})\,\delta x + (\pi_{y2} - \pi_{y1})\,\delta y + (\pi_{z2} - \pi_{z1})\,\delta z]\,\delta\sigma. \end{aligned}$$

Telle est l'égalité que l'on doit substituer à l'égalité (47) de la première Partie.

C'est cette expression (132) de $d\mathfrak{E}_v$ que nous devons introduire dans l'équation fondamentale (2) de la première Partie, en sorte que l'on devra avoir, en toute modification virtuelle,

$$(133)\quad \begin{aligned} d\mathfrak{E}_e + d\mathfrak{E}_j - \delta_T \mathfrak{F} & + \int (q_x\,\delta x + q_y\,\delta y + q_z\,\delta z)\,d\varpi \\ & + \int_S (p_x\,\delta x + p_y\,\delta y + p_z\,\delta z)\,dS \\ & + \int_\sigma [(\pi_{x2} - \pi_{x1})\,\delta x + (\pi_{y2} - \pi_{y1})\,\delta y + (\pi_{z2} - \pi_{z1})\,\delta z]\,d\sigma = 0. \end{aligned}$$

Nous pouvons appliquer tout d'abord cette égalité à une modification virtuelle pour laquelle on ait, en tout point de la surface σ,

$$\delta x = 0, \qquad \delta y = 0, \qquad \delta z = 0.$$

Nous serons alors conduits à la proposition suivante :

Il existe une grandeur finie II, continue dans tout le fluide, sauf peut-être en la surface σ, telle que l'on ait :

1° En tous les points de la surface S qui limite le fluide, les égalités [Ire Partie,

égalités (76)]

$$(134)\qquad \begin{cases} \Pi\cos(n_i, x) = P_x + p_x, \\ \Pi\cos(n_i, y) = P_y + p_y, \\ \Pi\cos(n_i, z) = P_z + p_z; \end{cases}$$

2° En tout point de la masse fluide hors la surface σ, les égalités [Ire Partie, égalités (74) et (75)]

$$(135)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Pi}{\partial x} - \rho(X_i + X_e - \gamma_x) - q_x = 0, \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial y} - \rho(X_i + X_e - \gamma_y) - q_y = 0, \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial z} - \rho(X_i + X_e - \gamma_z) - q_z = 0 \end{cases}$$

et, si le fluide est compressible, l'égalité

$$(136)\qquad \Pi + \rho^2(A_i + A_e) - \rho^2 \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} = 0.$$

Donnons maintenant à la masse fluide un déplacement virtuel quelconque. Au moyen des égalités (134), (135), (136), et par un calcul très semblable à celui qui occupe le début du Chapitre I, § 8, nous trouverons que l'on a

$$d\mathfrak{G}_e + d\mathfrak{G}_j - \delta_T \mathfrak{F} + \int (q_x \delta x + q_y \delta y + q_z \delta z)\, d\varpi$$
$$+ \int_S (p_x \delta x + p_y \delta y + p_z \delta z)\, dS$$
$$= \int_\sigma (\Pi_2 - \Pi_1)(\alpha\, \delta x + \beta\, \delta y + \gamma\, \delta z)\, d\sigma.$$

Si l'on conserve alors à $\mathfrak{P}_{x1}$, $\mathfrak{P}_{y1}$, $\mathfrak{P}_{z1}$, $\mathfrak{P}_{x2}$, $\mathfrak{P}_{y2}$, $\mathfrak{P}_{z2}$ le sens que donnent les égalités (35) et (35 *bis*), l'égalité (133) devient

$$\int_\sigma [(\mathfrak{P}_{x2} - \mathfrak{P}_{x1})\, \delta x + (\mathfrak{P}_{y2} - \mathfrak{P}_{y1})\, \delta y + (\mathfrak{P}_{z2} - \mathfrak{P}_{z1})\, \delta z]\, d\sigma = 0.$$

Cette égalité doit avoir lieu quelle que soit la modification virtuelle imposée au fluide, par conséquent quelle que soit, le long de la surface σ, la loi de variation des quantités δx, δy, δz; la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est la suivante :

On a, en tout point de l'onde σ, les trois égalités

$$(137)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{P}_{x2}-\mathfrak{P}_{x1}=0,\\ \mathfrak{P}_{y2}-\mathfrak{P}_{y1}=0,\\ \mathfrak{P}_{z2}-\mathfrak{P}_{z1}=0,\end{array}\right.$$

qui peuvent s'écrire plus explicitement, en vertu des égalités (35) et (35 *bis*),

$$(138)\qquad \left\{\begin{array}{l} (\nu_{x2}-\nu_{x1})\alpha+(\tau_{z2}-\tau_{z1})\beta+(\tau_{y2}-\tau_{y1})\gamma+(\Pi_2-\Pi_1)\alpha=0,\\ (\tau_{z2}-\tau_{z1})\alpha+(\nu_{y2}-\nu_{y1})\beta+(\tau_{x2}-\tau_{x1})\gamma+(\Pi_2-\Pi_1)\beta=0,\\ (\tau_{y2}-\tau_{y1})\alpha+(\tau_{x2}-\tau_{x1})\beta+(\nu_{z2}-\nu_{z1})\gamma+(\Pi_2-\Pi_1)\gamma=0.\end{array}\right.$$

Les quantités ν_x, ν_y, ν_z, τ_x, τ_y, τ_z sont supposées données par les égalités (43).

Or, selon ce que nous avons vu au Chapitre II, § 5, il doit exister, en chaque point de la surface σ, un vecteur (l_0, m_0, n_0) tel que l'on ait

$$(139)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial(u_2-u_1)}{\partial x}=\alpha l_0, & \dfrac{\partial(u_2-u_1)}{\partial y}=\beta l_0, & \dfrac{\partial(u_2-u_1)}{\partial z}=\gamma l_0,\\ \dfrac{\partial(v_2-v_1)}{\partial x}=\alpha m_0, & \dfrac{\partial(v_2-v_1)}{\partial y}=\beta m_0, & \dfrac{\partial(v_2-v_1)}{\partial z}=\gamma m_0,\\ \dfrac{\partial(w_2-w_1)}{\partial x}=\alpha n_0, & \dfrac{\partial(w_2-w_1)}{\partial y}=\beta n_0, & \dfrac{\partial(w_2-w_1)}{\partial z}=\gamma n_0.\end{array}\right.$$

Ces égalités donnent

$$(140)\qquad \frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial z}-\frac{\partial u_1}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}-\frac{\partial w_1}{\partial z}=\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0,$$

$$(141)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial v_2}{\partial z}+\dfrac{\partial w_2}{\partial y}-\dfrac{\partial v_1}{\partial z}-\dfrac{\partial w_1}{\partial y}=\gamma m_0+\beta n_0,\\ \dfrac{\partial w_2}{\partial x}+\dfrac{\partial u_2}{\partial z}-\dfrac{\partial w_1}{\partial x}-\dfrac{\partial u_1}{\partial z}=\alpha n_0+\gamma l_0,\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial y}+\dfrac{\partial v_2}{\partial x}-\dfrac{\partial u_1}{\partial y}-\dfrac{\partial u_2}{\partial x}=\beta l_0+\alpha m_0.\end{array}\right.$$

En vertu de ces égalités (139), (140), (141), les égalités (43) donnent

$$(142)\qquad \left\{\begin{array}{l} \nu_{x2}-\nu_{x1}=-\lambda(\rho,\mathrm{T})(\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)-2\mu(\rho,\mathrm{T})\alpha l_0,\\ \nu_{y2}-\nu_{y1}=-\lambda(\rho,\mathrm{T})(\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)-2\mu(\rho,\mathrm{T})\beta m_0,\\ \nu_{z2}-\nu_{z1}=-\lambda(\rho,\mathrm{T})(\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)-2\mu(\rho,\mathrm{T})\gamma n_0,\\ \tau_{x2}-\tau_{x1}=-\mu(\rho,\mathrm{T})(\gamma m_0+\beta n_0),\\ \tau_{y2}-\tau_{y1}=-\mu(\rho,\mathrm{T})(\alpha n_0+\gamma l_0),\\ \tau_{z2}-\tau_{z1}=-\mu(\rho,\mathrm{T})(\beta l_0+\alpha m_0).\end{array}\right.$$

En vertu de ces égalités (142), les égalités (138) deviennent

$$(143)\quad \begin{cases} \alpha[\Pi_2-\Pi_1-(\lambda+2\mu)(\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)]-\mu[\beta(\beta l_0-\alpha m_0)-\gamma(\alpha n_0-\gamma l_0)]=0, \\ \beta[\Pi_2-\Pi_1-(\lambda+2\mu)(\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)]-\mu[\gamma(\gamma m_0-\beta n_0)-\alpha(\beta l_0-\alpha m_0)]=0, \\ \gamma[\Pi_2-\Pi_1-(\lambda+2\mu)(\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)]-\mu[\alpha(\alpha n_0-\gamma l_0)-\beta(\gamma m_0-\beta n_0)]=0. \end{cases}$$

Ajoutons ces égalités membre à membre après les avoir multipliées respectivement par α, β, γ; nous trouvons

$$(144)\qquad \Pi_2-\Pi_1-[\lambda(\rho,\mathrm{T})+2\mu(\rho,\mathrm{T})](\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)=0.$$

Pour tirer les conséquences de cette égalité, nous distinguerons deux cas, selon que le fluide est ou non compressible.

Supposons d'abord que le fluide soit incompressible. Dans ce cas, l'on a

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial z}=0, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial z}=0$$

et, par conséquent, en vertu de l'égalité (140),

$$(145)\qquad \alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0=0.$$

Cette égalité (145), jointe à l'égalité (144), donne

$$(146)\qquad \Pi_2=\Pi_1.$$

Il n'est donc pas possible, en un fluide incompressible, d'observer une surface au passage de laquelle les composantes de la vitesse et la température varieraient d'une manière continue, tandis que la pression varierait d'une manière discontinue.

Par anticipation, nous avions énoncé ce théorème au Chapitre I, § II.

Moyennant l'égalité (144), les égalités (143) peuvent s'écrire :

$$\mu(\rho,\mathrm{T})[l_0-\alpha(\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)]=0,$$
$$\mu(\rho,\mathrm{T})[m_0-\beta(\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)]=0,$$
$$\mu(\rho,\mathrm{T})[n_0-\gamma(\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)]=0$$

ou bien, en observant que l'on a [Ire Partie, condition (62 *bis*)],

$$\mu(\rho,\mathrm{T})>0$$

et en tenant compte de l'égalité (145),

$$(147)\qquad l_0=0,\qquad m_0=0,\qquad n_0=0.$$

Les égalités (139) deviennent alors

$$(148)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x}, & \dfrac{\partial u_1}{\partial y} = \dfrac{\partial u_2}{\partial y}, & \dfrac{\partial u_1}{\partial z} = \dfrac{\partial u_2}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x} = \dfrac{\partial v_2}{\partial x}, & \dfrac{\partial v_1}{\partial y} = \dfrac{\partial v_2}{\partial y}, & \dfrac{\partial v_1}{\partial z} = \dfrac{\partial v_2}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial w_1}{\partial x} = \dfrac{\partial w_2}{\partial x}, & \dfrac{\partial w_1}{\partial y} = \dfrac{\partial w_2}{\partial y}, & \dfrac{\partial w_1}{\partial z} = \dfrac{\partial w_2}{\partial z}. \end{cases}$$

Supposons maintenant que l'onde σ soit *persistante*. Selon ce que nous avons vu au Chapitre I, § 5, nous aurons

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial t} + \mathfrak{N} l_0 = 0,$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} - \frac{\partial v_1}{\partial t} + \mathfrak{N} m_0 = 0,$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} - \frac{\partial w_1}{\partial t} + \mathfrak{N} n_0 = 0.$$

Moyennant les égalités (147), ces égalités deviennent

$$(149)\quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t}, \qquad \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial v_2}{\partial t}, \qquad \frac{\partial w_1}{\partial t} = \frac{\partial w_2}{\partial t}.$$

Voyons maintenant ce que donne l'égalité (144) lorsque le fluide est supposé compressible.

Dans ce cas, nous devons écrire, de part et d'autre de la surface σ,

$$(136)\quad \Pi + \rho^2(\mathrm{A}_i + \mathrm{A}_e) - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, \mathrm{T})}{\partial \rho} = 0,$$

ρ et T variant d'une manière continue lorsqu'on traverse la surface σ; il en est de même, d'après ce que nous avons vu (Ire Partie, Chap. I, § 4), de

$$\rho^2(\mathrm{A}_i + \mathrm{A}_e) - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, \mathrm{T})}{\partial \rho}$$

et, partant, de Π. On a donc

$$(146)\quad \Pi_1 = \Pi_2.$$

L'égalité (144) devient alors

$$[\lambda(\rho, \mathrm{T}) + 2\mu(\rho, \mathrm{T})](\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0) = 0,$$

Mais on a [Ire Partie, condition (65)]

$$\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T) > 0.$$

L'égalité précédente devient donc

(145) $$\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0 = 0.$$

Les égalités (148) et (149) s'établissent alors comme dans le cas précédent; l'onde considérée ne peut persister que si elle est, par rapport aux composantes de la vitesse, d'ordre supérieur au premier.

Dans le cas où le fluide est compressible, la densité variant d'une manière continue sur la surface σ, il doit exister une grandeur R_0 telle que l'on ait, en tout point de la surface σ,

(150) $$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial(\rho_2-\rho_1)}{\partial x} = \alpha R_0, \quad \dfrac{\partial(\rho_2-\rho_1)}{\partial y} = \beta R_0, \quad \dfrac{\partial(\rho_2-\rho_1)}{\partial z} = \gamma R_0, \\ \dfrac{\partial(\rho_2-\rho_1)}{\partial t} + \mathfrak{N} R_0 = 0. \end{array}\right.$$

En vertu des égalités (148) et (150), l'équation de continuité

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + v\frac{\partial\rho}{\partial y} + w\frac{\partial\rho}{\partial z} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

donne, en tout point de la surface σ,

(151) $$(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N}) R_0 = 0.$$

La température étant également continue sur la surface σ, il existe une grandeur Θ_0 telle que, sur cette surface,

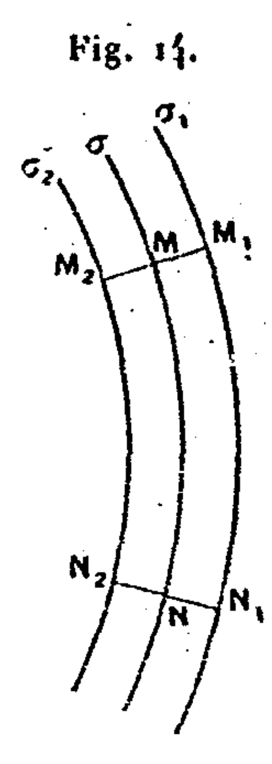
(152) $$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial(T_2-T_1)}{\partial x} = \alpha\Theta_0, \quad \dfrac{\partial(T_2-T_1)}{\partial y} = \beta\Theta_0, \quad \dfrac{\partial(T_2-T_1)}{\partial z} = \gamma\Theta_0, \\ \dfrac{\partial(T_2-T_1)}{\partial t} + \mathfrak{N}\Theta_0 = 0. \end{array}\right.$$

Supposons, d'abord, le *fluide bon conducteur*.

De part et d'autre de la surface σ, traçons (*fig.* 14) deux surfaces σ_1, σ_2, parallèles à σ et situées à une distance h de σ. Sur la surface σ prenons une aire $MN = A$; par le contour de cette aire, élevons des normales à la surface σ; ces normales découpent sur la surface σ_1 une aire M_1N_1 et sur la surface σ_2 une aire M_2N_2. Pendant le temps dt, le fluide qui se trouve à l'instant t dans le volume $M_1N_1M_2N_2$ (ou a) dégage une quantité de chaleur $\lambda\, dt$, qui s'obtiendrait

en faisant la somme, pour tous les éléments de ce volume, de la quantité dQ donnée par l'égalité (90).

Fig. 14.



D'autre part, en désignant par k le coefficient de conductibilité calorifique du fluide, cette quantité de chaleur est donnée par l'expression

$$-dt\int k\frac{\partial T}{\partial n_a}dS,$$

dS étant un élément de la surface $M_1N_1M_2N_2$ qui entoure le volume a et n_a la normale de l'élément dS vers l'intérieur du volume a. Nous avons donc

$$\lambda = -\int k\frac{\partial T}{\partial n_a}dS. \tag{153}$$

Cette égalité est générale.

Faisons maintenant tendre h vers o et cherchons la forme limite de l'égalité (153).

L'égalité (90) de la première Partie permet d'établir immédiatement que λ est de l'ordre du volume a et tend vers o avec h.

L'intégrale qui figure au second membre se compose de trois parties :

Une première partie, relative à l'aire latérale $M_1N_1M_2N_2$, tend vers o avec h.

Une seconde partie, relative à l'aire M_1N_1, a pour limite

$$-\int_A k\left(\frac{\partial T_1}{\partial x}\alpha+\frac{\partial T_1}{\partial y}\beta+\frac{\partial T_1}{\partial z}\gamma\right)d\sigma.$$

Une troisième partie, relative à l'aire M_2N_2, a pour limite

$$\int_A k\left(\frac{\partial T_2}{\partial x}\alpha+\frac{\partial T_2}{\partial y}\beta+\frac{\partial T_2}{\partial z}\gamma\right)d\sigma.$$

Si nous tenons compte des égalités (152), nous voyons que l'intégrale $\int k \frac{\partial T}{\partial n_a} dS$ a pour limite $\int_A k \Theta_0 d\sigma$ et que la forme limite de l'égalité (153) est

$$\int_A k \Theta_0 d\sigma = 0.$$

L'aire A étant une aire quelconque prise sur la surface σ, il revient au même de dire que l'on a, en tous les points de la surface σ,

(154) $$\Theta_0 = 0.$$

Supposons maintenant que *le fluide soit mauvais conducteur*. La quantité de chaleur dQ dégagée dans le temps dt par chaque élément $d\varpi$ du fluide est égale à o. Selon l'égalité (90) de la première Partie, cette condition s'exprime par l'égalité

$$\begin{aligned} & T\rho \frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} u + \frac{\partial T}{\partial y} v + \frac{\partial T}{\partial z} w + \frac{\partial T}{\partial t} \right) \\ & - T\rho^2 \frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial \rho\, \partial T} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ & + \lambda(\rho, T) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \\ & + 2\mu(\rho, T) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right. \\ & \qquad \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] = 0. \end{aligned}$$

En vertu des égalités (148) et (152), cette quantité se réduit à

(155) $$(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N}) \Theta_0 = 0.$$

La démonstration des égalités (154) et (155) est évidemment valable pour tous les fluides, compressibles ou non, visqueux ou non; l'égalité (154) suppose seulement que l'onde soit au moins du *premier* ordre par rapport à u, v, w et ρ.

En réunissant les résultats obtenus, nous allons être en mesure de répondre à cette question :

Au sein d'un fluide visqueux en mouvement, peut-on observer une surface qui soit onde persistante du premier ordre pour l'une au moins des six quantités u, v, w, ρ, Π, T *et onde d'ordre égal ou supérieur à* 1 *pour les cinq autres?*

PREMIÈRE SECTION. — *Fluides incompressibles bons conducteurs.*

Les égalités (148) et (149) montrent que la surface σ est d'ordre supérieur au premier pour les composantes u, v, w de la vitesse; les égalités (152) et (154) montrent qu'il en est de même pour la température. Si la surface σ était onde du premier ordre pour l'un des éléments du mouvement, ce ne pourrait être que pour la pression Π. Mais nous démontrerons au paragraphe suivant la proposition que voici : Si, en un fluide incompressible, une surface σ est onde au moins du second ordre pour u, v, w, T, elle est au moins du second ordre pour la pression Π. Admettant d'avance cette proposition, nous pouvons énoncer ce théorème :

Au sein d'un fluide visqueux, incompressible, bon conducteur, aucune surface ne peut être onde persistante du premier ordre pour l'un au moins des éléments du mouvement et d'ordre égal ou supérieur à 1 pour les autres.

DEUXIÈME SECTION. — *Autres fluides.*

PREMIER CAS. — *On n'a pas*

$$\mathfrak{N} = \alpha u + \beta v + \gamma w. \tag{156}$$

Dans ce cas, si le fluide est compressible, on a, en vertu de l'égalité (151),

$$R_0 = 0. \tag{157}$$

Si le fluide est mauvais conducteur, on a, en vertu de l'égalité (155),

$$\Theta_0 = 0. \tag{154}$$

Dès lors, en vertu des égalités (148) et (149), la surface considérée est onde au moins du second ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse; en vertu des égalités (154) et (152) il en est de même par rapport à la température T; enfin, si le fluide est compressible, en vertu des égalités (157) et (150) il en est de même de la densité ρ.

Reste à savoir si l'onde considérée ne pourrait pas être du premier ordre par rapport à la pression Π.

Si le fluide considéré est incompressible, cela sera impossible en vertu de la proposition que nous avons déjà invoquée et qui sera démontrée au paragraphe suivant.

Dans le cas où le fluide est compressible et où les actions qu'il subit ne sont pas newtoniennes, la démonstration de cette proposition nécessite quelques remarques préliminaires.

Si, dans un certain domaine, la densité ρ admet, par rapport à x, y, z, t, des

dérivées partielles jusqu'à l'ordre n inclusivement et si ces dérivées sont continues, il en est certainement de même, en général, de la fonction A_e; mais il n'est nullement certain qu'il en soit de même de la grandeur A_i; l'existence ou la non-existence de ces dérivées dépend évidemment de la manière dont la fonction $\psi(\rho, \rho', r)$, qui est infinie pour $r = 0$, se comporte pour les valeurs de r voisines de 0. Aussi avons-nous été amenés (I[re] Partie, Chap. I, § 4) à faire l'HYPOTHÈSE suivante :

La fonction $\psi(\rho, \rho', r)$ est d'une nature telle que la grandeur A_i admette par rapport à x, y, z, t des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre n dans tout domaine où la densité ρ admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre n.

Dans tous les cas où cette hypothèse est justifiée l'égalité

$$\Pi + \rho^2(A_i + A_e) - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} = 0 \tag{136}$$

nous montre que, *si, dans un certain domaine, en un fluide compressible, la densité ρ et la température T admettent des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre n, il en est de même de la pression Π.*

Dès lors, les égalités (150), (152), (154) et (157) nous montrent que la surface σ est, pour la pression Π, en un fluide compressible, une onde d'ordre supérieur au premier.

Nous pouvons désormais énoncer la proposition suivante :

En un fluide visqueux, il est impossible d'observer une onde qui soit du premier ordre pour certains éléments du mouvement et d'ordre au moins égal à 1 pour les autres, à moins que l'onde ne soit la surface de séparation de deux masses fluides qui restent les mêmes pendant toute la durée du mouvement.

DEUXIÈME CAS. — *On a*

$$\mathfrak{N} = \alpha u + \beta v + \gamma w. \tag{156}$$

Dans ce cas, si le fluide est compressible, l'égalité (151) est compatible avec l'hypothèse que R_0 est différent de 0; si le fluide est mauvais conducteur, l'égalité (155) est compatible avec l'hypothèse que Θ_0 est différent de 0; nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

En un fluide visqueux, qui est ou mauvais conducteur, ou compressible, ou à la fois compressible et mauvais conducteur, on peut observer des ondes qui sont du premier ordre par rapport à certains éléments du mouvement et d'ordre supérieur au premier pour les autres. Les deux masses fluides que sépare une telle onde restent les mêmes pendant toute la durée du mouvement.

Une telle onde présente, pour les diverses espèces de fluides, les caractères suivants :

1° Fluides incompressibles et mauvais conducteurs. — *L'onde, du premier ordre pour* T *et* Π, *est d'ordre plus élevé pour* u, v, w.

2° Fluides compressibles et bons conducteurs. — *L'onde, du premier ordre pour* ρ *et* Π, *est d'ordre plus élevé pour* u, v, w *et* T.

3° Fluides compressibles et mauvais conducteurs. — *L'onde, du premier ordre pour* ρ, Π *et* T, *est d'ordre plus élevé pour* u, v, w.

§ 2. — Des ondes du second ordre par rapport a certains éléments du mouvement.

Supposons qu'à l'instant t, au sein d'un fluide visqueux, une surface σ soit onde au moins du second ordre pour les composantes u, v, w de la vitesse, pour la température T et, en outre, si le fluide est compressible, pour la densité ρ. Quant à la pression Π, nous supposerons seulement, au début, que, pour elle, l'onde est au moins du premier ordre. Nous serons amené ainsi à démontrer un théorème invoqué au paragraphe précédent.

La condition restrictive indiquée en la Ire Partie, au Chapitre I, § 3, est remplie dans l'hypothèse où nous nous plaçons. Nous pouvons donc faire usage des équations du mouvement des fluides visqueux sous la forme qui a été donnée en cet endroit par les égalités (74). Cette forme n'est autre que celle qui est donnée en la présente Partie par les égalités (135), avec les expressions suivantes de q_x, q_y, q_z [Ire Partie, égalités (58)] :

$$(158)\quad \begin{cases} q_x = (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\,\Delta u + \theta\dfrac{\partial\lambda}{\partial x} \\ \qquad + 2\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial\mu}{\partial x} + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\dfrac{\partial\mu}{\partial y} + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\dfrac{\partial\mu}{\partial z}, \\ q_y = (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial y} + \mu\,\Delta v + \theta\dfrac{\partial\lambda}{\partial y} \\ \qquad + \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\dfrac{\partial\mu}{\partial x} + 2\dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial\mu}{\partial y} + \left(\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)\dfrac{\partial\mu}{\partial z}, \\ q_z = (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial z} + \mu\,\Delta w + \theta\dfrac{\partial\lambda}{\partial z} \\ \qquad + \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\dfrac{\partial\mu}{\partial x} + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)\dfrac{\partial\mu}{\partial y} + 2\dfrac{\partial w}{\partial z}\dfrac{\partial\mu}{\partial z}, \\ \qquad\qquad \theta = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}. \end{cases}$$

L'onde σ étant supposée au moins du deuxième ordre pour u, v, w, il existe en chaque point de cette surface un vecteur l_0, m_0, n_0 tel que l'on ait

$$(159)\quad \left\{\begin{array}{lll} \frac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial x^2}=\alpha^2 l_0, & \frac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial y^2}=\beta^2 l_0, & \frac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial z^2}=\gamma^2 l_0, \\ \frac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial y\,\partial z}=\beta\gamma l_0, & \frac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial z\,\partial x}=\gamma\alpha l_0, & \frac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial x\,\partial y}=\alpha\beta l_0, \\ \frac{\partial^2(v_2-v_1)}{\partial x^2}=\alpha^2 m_0, & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots \end{array}\right.$$

ρ et T étant continus, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre, sur la surface σ, il en est de même de $\lambda(\rho, T)$ et de $\mu(\rho, T)$, de sorte que les égalités (158) permettent d'écrire

$$(160)\quad \left\{\begin{array}{l} q_{x2}-q_{x1}=[\lambda(\rho,T)+\mu(\rho,T)](\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)\alpha+\mu(\rho,T)l_0, \\ q_{y2}-q_{y1}=[\lambda(\rho,T)+\mu(\rho,T)](\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)\beta+\mu(\rho,T)m_0, \\ q_{z2}-q_{z1}=[\lambda(\rho,T)+\mu(\rho,T)](\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)\gamma+\mu(\rho,T)n_0. \end{array}\right.$$

Les hypothèses faites sur u, v, w nous assurent que γ_x, γ_y, γ_z varient d'une manière continue au travers de la surface σ; les hypothèses faites sur ρ, jointes à ce qui a été supposé en la Ire Partie, Chapitre I, § 4, nous assurent qu'il en est de même pour X_i, X_e, Y_i, Y_e, Z_i, Z_e; enfin, la surface σ étant onde au moins du premier ordre pour la pression Π, il existe assurément un vecteur P, tel que

$$(161)\quad \frac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial x}=\alpha P,\qquad \frac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial y}=\beta P,\qquad \frac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial z}=\gamma P.$$

Dès lors, les équations (135) permettent d'écrire, en chaque point de la surface σ,

$$(162)\quad \left\{\begin{array}{l} \{P-[\lambda(\rho,T)+\mu(\rho,T)](\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)\}\alpha-\mu(\rho,T)l_0=0, \\ \{P-[\lambda(\rho,T)+\mu(\rho,T)](\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)\}\beta-\mu(\rho,T)m_0=0, \\ \{P-[\lambda(\rho,T)+\mu(\rho,T)](\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)\}\gamma-\mu(\rho,T)n_0=0. \end{array}\right.$$

Ajoutons membre à membre ces égalités après les avoir multipliées respectivement par α, β, γ et nous trouvons

$$(163)\quad P-[\lambda(\rho,T)+2\mu(\rho,T)](\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)=0.$$

Supposons, tout d'abord, que le fluide soit *incompressible*. Nous aurons identiquement

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

partant,

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial z}=0,$$

ce qui permettra d'écrire, en tout point de la surface σ,

$$\frac{\partial(\theta_2-\theta_1)}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial(\theta_2-\theta_1)}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial(\theta_2-\theta_1)}{\partial z}=0$$

ou bien, en vertu des égalités (159),

$$(\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)\,\alpha=0,$$
$$(\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)\,\beta=0,$$
$$(\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)\,\gamma=0,$$

égalités qui entraînent celle-ci :

$$(164) \qquad \alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0=0.$$

L'égalité (163) donne alors

$$(165) \qquad \mathrm{P}=0$$

et partant, selon les égalités (161),

$$(166) \qquad \frac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial z}=0.$$

D'ailleurs, si l'onde est persistante, on doit avoir, selon l'égalité (98),

$$\frac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial t}+\mathfrak{N}\mathrm{P}=0,$$

en sorte que l'égalité (165) donne

$$(167) \qquad \frac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial t}=0.$$

Les égalités (166) et (167) justifient le théorème suivant, déjà invoqué au précédent paragraphe :

Au sein d'un fluide visqueux incompressible, une onde persistante, qui est au moins du second ordre pour les composantes u, v, w de la vitesse et pour la température T, *est aussi au moins du second ordre pour la pression* Π.

Supposons maintenant le fluide *compressible*. D'après ce qui a été dit au paragraphe I, la surface σ, onde du second ordre pour la densité ρ et la tempéra-

ture T, est aussi onde du second ordre pour la pression Π; on a donc encore

$$(165)\qquad P = 0,$$

en sorte que l'égalité (163) devient

$$[\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T)](\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0) = 0.$$

Mais on a [Ire Partie, condition (65)]

$$\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T) > 0.$$

L'égalité précédente devient donc

$$(164)\qquad \alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0 = 0.$$

Les égalités (164) et (165) étant ainsi établies pour tous les fluides visqueux, reportons-les dans les égalités (162); nous trouvons

$$\mu(\rho, T) l_0 = 0, \qquad \mu(\rho, T) m_0 = 0, \qquad \mu(\rho, T) n_0 = 0,$$

et comme on a [Ire Partie, condition (62 *bis*)]

$$\mu(\rho, T) > 0,$$

les égalités précédentes deviennent

$$(168)\qquad l_0 = 0, \qquad m_0 = 0, \qquad n_0 = 0.$$

D'autre part, d'après ce que nous avons vu au Chapitre II, § 5, il existe un vecteur l_1, m_1, n_1 tel que l'on ait

$$(169)\quad \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{\partial^2(u_2 - u_1)}{\partial x\, \partial t} = \alpha l_1, & \dfrac{\partial^2(u_2 - u_1)}{\partial y\, \partial t} = \beta l_1, & \dfrac{\partial^2(u_2 - u_1)}{\partial z\, \partial t} = \gamma l_1, \\ \dfrac{\partial^2(v_2 - v_1)}{\partial x\, \partial t} = \alpha m_1, & \dfrac{\partial^2(v_2 - v_1)}{\partial y\, \partial t} = \beta m_1, & \dfrac{\partial^2(v_2 - v_1)}{\partial z\, \partial t} = \gamma m_1, \\ \dfrac{\partial^2(w_2 - w_1)}{\partial x\, \partial t} = \alpha n_1, & \dfrac{\partial^2(w_2 - w_1)}{\partial y\, \partial t} = \beta n_1, & \dfrac{\partial^2(w_2 - w_1)}{\partial z\, \partial t} = \gamma n_1, \end{array} \right.$$

et si l'onde considérée est persistante, on a

$$(170)\quad \left\{ \begin{array}{lll} l_1 + \mathfrak{N} l_0 = 0, & m_1 + \mathfrak{N} m_0 = 0, & n_1 + \mathfrak{N} n_0 = 0, \\ \dfrac{\partial^2(u_2 - u_1)}{\partial t^2} + \mathfrak{N} l_1 = 0, & \dfrac{\partial^2(v_2 - v_1)}{\partial t^2} + \mathfrak{N} m_1 = 0, & \dfrac{\partial^2(w_2 - w_1)}{\partial t^2} + \mathfrak{N} n_1 = 0. \end{array} \right.$$

Les égalités (159), (168), (169), (170) nous enseignent alors que toutes les

dérivées partielles du second ordre des différences $(u_2 - u_1)$, $(v_2 - v_1)$, $(w_2 - w_1)$ sont nulles sur la surface σ. Si l'onde considérée est persistante, elle est certainement d'ordre supérieur au second pour les composantes de la vitesse.

Si le fluide est compressible, il existe deux grandeurs R_0, R_1, telles que l'on ait, en tout point de la surface σ,

$$(171)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial^2(\rho_2-\rho_1)}{\partial x^2} = \alpha^2 R_0, & \dfrac{\partial^2(\rho_2-\rho_1)}{\partial y^2} = \beta^2 R_0, & \dfrac{\partial^2(\rho_2-\rho_1)}{\partial z^2} = \gamma^2 R_0, \\ \dfrac{\partial^2(\rho_2-\rho_1)}{\partial y\,\partial z} = \beta\gamma R_0, & \dfrac{\partial^2(\rho_2-\rho_1)}{\partial z\,\partial x} = \gamma\alpha R_0, & \dfrac{\partial^2(\rho_2-\rho_1)}{\partial x\,\partial y} = \alpha\beta R_0, \end{array}\right.$$

$$(172)\quad \frac{\partial^2(\rho_2-\rho_1)}{\partial x\,\partial t} = \alpha R_1, \qquad \frac{\partial^2(\rho_2-\rho_1)}{\partial y\,\partial t} = \beta R_1, \qquad \frac{\partial^2(\rho_2-\rho_1)}{\partial z\,\partial t} = \gamma R_1.$$

En outre, si l'onde est persistante,

$$(173)\qquad R_1 + \mathfrak{N} R_0 = 0, \qquad \frac{\partial^2(\rho_2-\rho_1)}{\partial t^2} + \mathfrak{N} R_1 = 0.$$

L'équation de continuité nous enseigne que l'on a identiquement, en tout point,

$$(174)\qquad K = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\rho u + \frac{\partial}{\partial y}\rho v + \frac{\partial}{\partial z}\rho w = 0,$$

partant

$$\frac{\partial K}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial K}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial K}{\partial z} = 0,$$

ce qui permet d'écrire, en tout point de la surface σ,

$$\frac{\partial(K_2-K_1)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial(K_2-K_1)}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial(K_2-K_1)}{\partial z} = 0$$

ou bien, en vertu des égalités (171), (172), (173) et (174),

$$\begin{aligned} (\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N}) R_0 \alpha &= 0, \\ (\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N}) R_0 \beta &= 0, \\ (\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N}) R_0 \gamma &= 0, \end{aligned}$$

égalités qui donnent

$$(175)\qquad (\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N}) R_0 = 0.$$

Il existe deux grandeurs Θ_0, Θ_1 telles que, sur la surface σ,

$$(176)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial^2(T_2-T_1)}{\partial x^2} = \alpha^2\Theta_0, & \dfrac{\partial^2(T_2-T_1)}{\partial y^2} = \beta^2\Theta_0, & \dfrac{\partial^2(T_2-T_1)}{\partial z^2} = \gamma^2\Theta_0, \\ \dfrac{\partial^2(T_2-T_1)}{\partial y\,\partial z} = \beta\gamma\Theta_0, & \dfrac{\partial^2(T_2-T_1)}{\partial z\,\partial x} = \gamma\alpha\Theta_0, & \dfrac{\partial^2(T_2-T_1)}{\partial x\,\partial y} = \alpha\beta\Theta_0, \end{array}\right.$$

$$(177)\quad \frac{\partial^2(T_2-T_1)}{\partial x\,\partial t} = \alpha\,\Theta_1, \qquad \frac{\partial^2(T_2-T_1)}{\partial y\,\partial t} = \beta\,\Theta_1, \qquad \frac{\partial^2(T_2-T_1)}{\partial z\,\partial t} = \gamma\,\Theta_1.$$

En outre, si l'onde est persistante, on a

$$(178)\qquad \Theta_1 + \mathfrak{N}\Theta_0 = 0, \qquad \frac{\partial^2(T_2-T_1)}{\partial t^2} + \mathfrak{N}\Theta_1 = 0.$$

Considérons la relation supplémentaire [Ire Partie, égalité (94)] et supposons d'abord le *fluide bon conducteur :*

$$k(\rho, T) > 0.$$

Elle nous donnera, en tout point de la surface σ,

$$k(\rho, T)\,\Delta(T_2 - T_1) = 0$$

ou, selon les égalités (176),

$$k(\rho, T)\,\Theta_0 = 0,$$

ou enfin

$$(179)\qquad \Theta_0 = 0.$$

Supposons, au contraire, le *fluide mauvais conducteur :*

$$k(\rho, T) = 0.$$

Nous aurons, en tout point,

$$\begin{aligned}(180)\quad J = {} & \frac{T}{E}\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}u + \frac{\partial T}{\partial y}v + \frac{\partial T}{\partial z}w + \frac{\partial T}{\partial t}\right) \\ & - \frac{T}{E}\rho^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial T\,\partial\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ & + \frac{\lambda(\rho, T)}{E}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \\ & + \frac{2\mu(\rho, T)}{E}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] = 0,\end{aligned}$$

partant

$$\frac{\partial J}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial J}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial J}{\partial z} = 0,$$

ce qui permet d'écrire, en tout point de la surface σ,

$$\frac{\partial(J_2 - J_1)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial(J_2 - J_1)}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial(J_2 - J_1)}{\partial z} = 0.$$

Si l'on observe que la surface σ, onde du second ordre pour ρ et T, est d'ordre supérieur au second pour u, v, w, on voit que ces égalités deviennent

$$\begin{aligned}
u\frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial x\,\partial y} + w\frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial x\,\partial t} &= 0,\\
u\frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial y\,\partial x} + v\frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial y^2} + w\frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial y\,\partial t} &= 0,\\
u\frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial z\,\partial x} + v\frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial z\,\partial y} + w\frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial z\,\partial t} &= 0,
\end{aligned}$$

ou bien, en vertu des égalités (176), (177), (178),

$$\begin{aligned}
(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N})\Theta_0\alpha &= 0,\\
(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N})\Theta_0\beta &= 0,\\
(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N})\Theta_0\gamma &= 0.
\end{aligned}$$

Ces égalités donnent

(181) $$(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N})\Theta_0 = 0.$$

Discutons les diverses égalités obtenues.

PREMIÈRE SECTION. — *Fluides incompressibles et bons conducteurs.*

L'égalité (179), jointe aux égalités (176), (177), (178), nous enseigne que la surface σ est onde d'ordre supérieur au second pour la température T, comme elle l'est déjà pour les composantes u, v, w de la vitesse; si donc elle pouvait être du second ordre par rapport à quelque élément du mouvement, ce serait par rapport à la pression Π; mais, au paragraphe suivant, nous démontrerons qu'elle est, au moins, du troisième ordre par rapport à la pression Π; nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Au sein d'un fluide visqueux, incompressible et bon conducteur, on ne peut observer aucune onde qui soit du second ordre par rapport à certains éléments du mouvement et d'ordre au moins égal à 2 par rapport aux autres éléments.

DEUXIÈME SECTION. — *Autres fluides.*

Ici, nous devons distinguer deux cas.

PREMIER CAS. — *On n'a pas*

$$\mathfrak{M} = \alpha u + \beta v + \gamma w. \tag{156}$$

Dans ce cas, l'égalité (181) donne l'égalité

$$\Theta_0 = 0, \tag{179}$$

même si le fluide est mauvais conducteur. Les égalités (176), (177), (178) montrent alors que la surface σ est, pour la température T, une onde d'ordre supérieur à 2.

Si le fluide est compressible, l'égalité (175) donne

$$R_0 = 0,$$

ce qui, moyennant les égalités (171), (172), (173), montre que la surface σ est une onde au moins du troisième ordre pour la densité ρ.

Il reste à examiner si l'onde ne peut pas être du second ordre par rapport à la pression Π. Que cela soit impossible pour un fluide incompressible, nous en sommes assurés par un théorème qui sera démontré au paragraphe suivant; si, au contraire, le fluide est compressible, nous savons, par ce qui a été dit au § 1, que la surface σ, onde au moins du troisième ordre pour la densité ρ et la température T, est, au moins, du troisième ordre pour la pression Π.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

En aucun fluide visqueux on ne peut observer une onde qui soit du second ordre par rapport à certains éléments du mouvement et d'ordre au moins égal à 2 pour les autres, à moins que les deux masses fluides séparées par cette onde ne demeurent les mêmes pendant toute la durée du mouvement.

SECOND CAS. — *On a*

$$\mathfrak{M} = \alpha u + \beta v + \gamma w. \tag{156}$$

Dans ce cas, si le fluide est mauvais conducteur, l'égalité (181) peut être vérifiée, bien que Θ_0 diffère de 0; si le fluide est compressible, l'égalité (175) peut être vérifiée, bien que R_0 diffère de 0.

Nous pouvons donc énoncer les propositions suivantes :

Si un fluide visqueux est ou mauvais conducteur, ou compressible, ou à la fois mauvais conducteur et compressible, on peut y observer une onde du second

ordre par rapport à certains éléments du mouvement, d'ordre supérieur à 2 pour les autres éléments et qui, pendant toute la durée du mouvement, sépare les mêmes masses fluides.

Pour les diverses catégories de fluides visqueux, cette onde présente les particularités suivantes :

FLUIDE VISQUEUX, INCOMPRESSIBLE ET MAUVAIS CONDUCTEUR. — *Du second ordre par rapport à la température* T *et à la pression* Π, *l'onde est au moins du troisième ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse.*

FLUIDE VISQUEUX, COMPRESSIBLE ET BON CONDUCTEUR. — *Du second ordre par rapport à la densité* ρ *et à la pression* Π, *l'onde est au moins du troisième ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse et à la température* T.

FLUIDE VISQUEUX, COMPRESSIBLE ET MAUVAIS CONDUCTEUR. — *Du second ordre par rapport à la densité* ρ, *à la température* T *et à la pression* Π, *l'onde est au moins du troisième ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse.*

§ 3. — DES ONDES DU TROISIÈME ORDRE PAR RAPPORT A CERTAINS ÉLÉMENTS DU MOUVEMENT.

Continuant notre analyse, nous allons supposer que la surface σ est au moins onde du troisième ordre relativement aux grandeurs

$$u, \quad v, \quad w, \quad \rho, \quad T.$$

En ce qui concerne la pression Π, nous supposerons seulement qu'elle est au moins du second ordre.

Selon les lemmes de M. Hadamard, énoncés et démontrés au Chapitre précédent, les dérivées du troisième ordre $(u_2 - u_1)$, $(v_2 - v_1)$, $(w_2 - w_1)$ s'expriment toutes, sur la surface σ, au moyen de quatre vecteurs (l_0, m_0, n_0), (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3). Si l'onde σ est persistante, on a

$$\begin{aligned} &l_1 + \mathfrak{N} l_0 = 0, && l_2 + \mathfrak{N} l_1 = 0, && l_3 + \mathfrak{N} l_2 = 0, \\ &m_1 + \mathfrak{N} m_0 = 0, && m_2 + \mathfrak{N} m_1 = 0, && m_3 + \mathfrak{N} m_2 = 0, \\ &n_1 + \mathfrak{N} n_0 = 0, && n_2 + \mathfrak{N} n_1 = 0, && n_3 + \mathfrak{N} n_2 = 0. \end{aligned}$$

Il suffira de démontrer que

$$(182) \qquad l_0 = 0, \qquad m_0 = 0, \qquad n_0 = 0$$

pour prouver que toutes les dérivées partielles du troisième ordre de $(u_2 - u_1)$, $(v_2 - v_1)$, $(w_2 - w_1)$ sont nulles sur la surface σ, et que celle-ci est une onde au moins du quatrième ordre pour les composantes u, v, w de la vitesse.

Toutes les dérivées partielles du second ordre de la différence $(\Pi_2 - \Pi_1)$ s'expriment, sur la surface σ, au moyen de trois quantités P_0, P_1, P_2, liées par les relations

$$P_1 + \mathfrak{N} P_0 = 0, \qquad P_2 + \mathfrak{N} P_1 = 0.$$

Il suffira de prouver que l'on a

$$(183) \qquad P_0 = 0$$

pour démontrer que l'onde σ est au moins du troisième ordre par rapport à la pression Π.

Considérons les équations, vérifiées en tout point du fluide [égalités (135) et (158)],

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} - \rho(X_i + X_e - \gamma_x) - (\lambda + \mu)\frac{\partial \theta}{\partial x} - \mu \Delta u - \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x}$$
$$- 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \mu}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial \mu}{\partial y} - \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial \mu}{\partial z} = 0,$$

. . . .

En différentiant la première de ces égalités par rapport à x, la seconde par rapport à y et la troisième par rapport à z, nous obtenons trois nouvelles égalités, vérifiées en tout point du fluide, et qui sont

$$(184) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} - (\lambda + \mu)\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \mu \dfrac{\partial}{\partial x}\Delta u + \ldots = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} - (\lambda + \mu)\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \mu \dfrac{\partial}{\partial y}\Delta v + \ldots = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} - (\lambda + \mu)\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \mu \dfrac{\partial}{\partial z}\Delta w + \ldots = 0, \end{cases}$$

les ... désignant des termes qui varient d'une manière continue lorsqu'on traverse la surface σ.

Ces égalités montrent de suite que l'on a, sur la surface σ,

$$(185) \qquad \begin{cases} \{P_0 - [\lambda(\rho, T) + \mu(\rho, T)](\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0)\}\alpha^2 - \mu(\rho, T)\alpha l_0 = 0, \\ \{P_0 - [\lambda(\rho, T) + \mu(\rho, T)](\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0)\}\beta^2 - \mu(\rho, T)\beta l_0 = 0, \\ \{P_0 - [\lambda(\rho, T) + \mu(\rho, T)](\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0)\}\gamma^2 - \mu(\rho, T)\gamma l_0 = 0. \end{cases}$$

En ajoutant ces égalités membre à membre, on trouve l'égalité

$$(186) \qquad P_0 - [\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T)](\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0) = 0.$$

Supposons d'abord que le fluide soit incompressible.

Nous avons, en tout point, $\theta = 0$, partant $\Delta\theta = 0$, ce qui donne, sur la surface σ,

$$(187) \qquad \alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0 = 0.$$

L'égalité (186) devient alors

$$(183) \qquad P_0 = 0.$$

D'où le théorème suivant, invoqué sans démonstration au paragraphe précédent :

Au sein d'un fluide incompressible, une onde qui est au moins du troisième ordre par rapport à u, v, w et T, est aussi au moins du troisième ordre par rapport à II.

Si le fluide est compressible, nous savons, par ce qui a été dit au § 1, que la surface σ, onde au moins du troisième ordre par rapport à ρ et à T, est au moins du troisième ordre par rapport à II; nous avons donc l'égalité (183). Mais, d'autre part, nous avons l'inégalité [Ire Partie, inégalité (65)]

$$\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T) > 0.$$

Les égalités (183) et (186) nous donnent alors l'égalité (187).

Les égalités (183) et (187) étant vraies en toutes circonstances, les égalités (185) donnent

$$(182) \qquad l_0 = 0, \qquad m_0 = 0, \qquad n_0 = 0,$$

car on a [Ire Partie, inégalité (62 *bis*)]

$$\mu(\rho, T) > 0.$$

L'onde considérée est donc au moins du quatrième ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse.

Sur la surface σ, toutes les dérivées du troisième ordre de la différence $(\rho_2 - \rho_1)$ s'expriment au moyen de quatre grandeurs R_0, R_1, R_2, R_3, liées par les relations

$$(188) \qquad R_1 + \mathfrak{N} R_0 = 0, \qquad R_2 + \mathfrak{N} R_1 = 0, \qquad R_3 + \mathfrak{N} R_2 = 0.$$

L'égalité $R_0 = 0$ enseigne que la surface σ est onde au moins du quatrième ordre pour la densité ρ.

Si le fluide est compressible, on a, en chaque point et à chaque instant,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\rho u + \frac{\partial}{\partial y}\rho v + \frac{\partial}{\partial z}\rho w = 0$$

et, par conséquent,

$$\Delta\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\rho u + \frac{\partial}{\partial y}\rho v + \frac{\partial}{\partial z}\rho w\right) = 0.$$

Cette égalité peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\rho + u\frac{\partial}{\partial x}\Delta\rho + v\frac{\partial}{\partial y}\Delta\rho + w\frac{\partial}{\partial z}\Delta\rho + \ldots = 0,$$

... désignant des termes qui varient d'une manière continue au travers de la surface σ.

On en conclut sans peine, en vertu des égalités (188), que l'on a, sur la surface σ,

(189) $$(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N})R_0 = 0.$$

Sur la surface σ, les dérivées du troisième ordre de la température T s'expriment au moyen de quatre quantités Θ_0, Θ_1, Θ_2, Θ_3, liées par les relations

(190) $$\Theta_1 + \mathfrak{N}\Theta_0 = 0, \qquad \Theta_2 + \mathfrak{N}\Theta_1 = 0, \qquad \Theta_3 + \mathfrak{N}\Theta_2 = 0.$$

Si l'on a

(191) $$\Theta_0 = 0,$$

l'onde considérée est au moins du quatrième ordre par rapport à la température T.

Supposons d'abord le fluide *bon conducteur*. En tout point et à tout instant sont vérifiées la relation supplémentaire [Ire Partie, égalité (94)] et aussi les égalités que l'on obtient en différentiant celle-ci par rapport à x, ou à y, ou à z. Ces dernières égalités peuvent s'écrire

$$k(\rho, T)\frac{\partial}{\partial x}\Delta T + \ldots = 0,$$
$$k(\rho, T)\frac{\partial}{\partial y}\Delta T + \ldots = 0,$$
$$k(\rho, T)\frac{\partial}{\partial z}\Delta T + \ldots = 0,$$

les ... désignant des termes qui varient d'une manière continue au travers de la surface σ. On en conclut sans peine que l'on a, sur la surface σ,

$$\alpha\Theta_0 = 0, \qquad \beta\Theta_0 = 0, \qquad \gamma\Theta_0 = 0,$$

ce qui entraîne l'égalité (191).

Supposons maintenant le fluide *mauvais conducteur*. L'égalité (180) est vérifiée en tout point et à tout instant; il en est de même de l'égalité

$$\Delta J = 0$$

qui peut s'écrire

$$\frac{T}{E}\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2}\left(u\frac{\partial}{\partial x}\Delta T + v\frac{\partial}{\partial y}\Delta T + w\frac{\partial}{\partial z}\Delta T + \frac{\partial}{\partial t}\Delta T\right) + \ldots = 0,$$

... désignant un ensemble de termes qui varient d'une manière continue au travers de la surface σ. On en conclut, en vertu des égalités (190), que l'on a, en tout point de la surface σ,

$$(192) \qquad (\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathcal{N})\Theta_0 = 0.$$

La discussion s'achève alors comme au paragraphe précédent et conduit aux conclusions que voici :

Au sein d'un FLUIDE VISQUEUX, INCOMPRESSIBLE ET BON CONDUCTEUR, *on ne peut observer aucune onde qui soit du troisième ordre par rapport à certains éléments du mouvement et d'ordre au moins égal à* 3 *pour les autres éléments.*

Au sein de tout autre FLUIDE VISQUEUX, *on peut observer une telle onde.*

Si le fluide est INCOMPRESSIBLE ET MAUVAIS CONDUCTEUR, *cette onde est du troisième ordre pour* T *et* Π *et d'ordre au moins égal à* 4 *pour* u, v, w.

Si le fluide est COMPRESSIBLE ET BON CONDUCTEUR, *cette onde est du troisième ordre pour* ρ *et* Π *et d'ordre au moins égal à* 4 *pour* u, v, w *et* T.

Si le fluide est COMPRESSIBLE ET MAUVAIS CONDUCTEUR, *cette onde est du troisième ordre pour* ρ, T *et* Π *et d'ordre au moins égal à* 4 *pour* u, v, w.

Les deux masses fluides que sépare la surface de l'onde demeurent les mêmes pendant toute la durée du mouvement, car on a

$$(193) \qquad \mathcal{N} = \alpha u + \beta v + \gamma w.$$

§ 4. — Résumé des propriétés des ondes au sein des fluides visqueux [1].

On voit sans peine que les démonstrations données aux §§ 2 et 3 s'étendent de proche en proche et s'appliquent aux ondes de tous ordres. Si l'on réunit alors ce qui a été dit dans le présent Chapitre aux résultats obtenus au Chapitre I, § 11, on parvient à des théorèmes entièrement généraux au sujet des ondes qui peuvent persister en un fluide visqueux. Ces théorèmes s'appliquent même aux surfaces de discontinuité pour certains éléments, surfaces qui sont des ondes d'ordre 0 par rapport à ces éléments.

---

(1) *Des ondes qui peuvent persister en un fluide visqueux* (*Comptes rendus*, t. CXXXIII, 14 octobre 1901, p. 579).

Voici ces théorèmes :

Théorème I. — *Au sein d'un* fluide visqueux, incompressible et bon conducteur, *il ne peut persister aucune onde, quel qu'en soit l'ordre par rapport aux divers éléments du mouvement.*

En toute la masse d'un tel fluide et pendant toute la durée du mouvement, sauf peut-être à un instant isolé, u, v, w *et* T *sont des fonctions continues et analytiques de* x, y, z, t.

Théorème II. — *Au sein d'un* fluide visqueux *qui est ou* compressible, *ou* mauvais conducteur, *ou* à la fois compressible et mauvais conducteur, *on peut observer des ondes persistantes.*

Si le fluide est incompressible et mauvais conducteur, *une onde d'ordre* n *par rapport à* T *et à* Π *est au moins d'ordre* $(n+1)$ *par rapport à* u, v, w.

Si le fluide est compressible et bon conducteur, *une onde d'ordre* n *par rapport à* ρ *et à* Π *est au moins d'ordre* $(n+1)$ *par rapport à* u, v, w *et à* T.

Si le fluide est compressible et mauvais conducteur, *une onde d'ordre* n *par rapport à* ρ, *à* T *et à* Π *est au moins d'ordre* $(n+1)$ *par rapport à* u, v, w.

Théorème III. — *La vitesse de déplacement de l'onde est égale, en chacun des points de cette onde, à la projection de la vitesse du fluide sur la normale à l'onde :*

$$\mathfrak{N} = \alpha u + \beta v + \gamma w.$$

Les ondes partagent donc le fluide en masses qui demeurent les mêmes pendant toute la durée du mouvement.

Au sein de chacune de ces masses u, v, w, ρ, T, Π *sont des fonctions continues et analytiques de* x, y, z, t.

CHAPITRE IV.

DES ONDES DANS LES FLUIDES PARFAITS.

§ 1. — Quelques propriétés thermodynamiques des fluides sans viscosité [1].

Dans ce Chapitre, nous nous proposons d'étudier les propriétés des *fluides parfaits*, c'est-à-dire des fluides pour lesquels les deux coefficients de viscosité

[1] *Sur les chaleurs spécifiques des fluides dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles* (*Comptes rendus*, t. CXXXII, 11 février 1901, p. 292).

sont identiquement nuls :

$$\lambda(\rho, T) = 0, \qquad \mu(\rho, T) = 0.$$

Nous exposerons d'abord quelques considérations sur les coefficients calorifiques de ces fluides, considérations qui nous seront utiles ensuite.

Dans une modification réelle ou virtuelle où la densité ρ et la température T varient de $\delta\rho$, δT, la masse élémentaire dm dégage une quantité de chaleur dQ que donne l'égalité (82) de la première Partie, à condition d'y supprimer le travail $d\tau_v\, d\varpi$ des actions de viscosité; nous avons donc

$$(194) \qquad dQ = \frac{T}{E}\left(\frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial\rho\, \partial T}\delta\rho + \frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial T^2}\delta T\right).$$

La quantité

$$(195) \qquad c(\rho, T) = -\frac{T}{E}\frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial T^2}$$

est [Ire Partie, égalité (84)] la *chaleur spécifique à densité constante* du fluide.

Selon le *postulat de Helmholtz*, cette quantité est essentiellement positive :

$$(196) \qquad c > 0, \qquad \frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial T^2} < 0.$$

D'autre part, en tout point non situé sur une surface de discontinuité, nous avons [Ire Partie, égalité (75)]

$$(197) \qquad \Pi + \rho^2(A_i + A_e) - \rho\frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial\rho} = 0.$$

Nous allons écrire cette dernière condition sous une forme un peu différente.

Considérons les fonctions $\mathcal{A}_i(R, x, y, z, t)$, $\mathcal{A}_e(R, x, y, z, t)$, définies en la Ire Partie, Chapitre I, § 4.

Nous aurons

$$A_i(x, y, z, t) = \mathcal{A}_i(\rho, x, y, z, t),$$
$$A_e(x, y, z, t) = \mathcal{A}_e(\rho, x, y, z, t)$$

L'égalité (197) pourra alors s'écrire

$$(198) \qquad \Pi + \rho^2[\mathcal{A}_i(\rho, x, y, z, t) + \mathcal{A}_e(\rho, x, y, z, t)] - \rho^2\frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial\rho} = 0.$$

Cette égalité peut s'interpréter.

Supprimons toutes les parties du fluide qui sont contiguës à l'élément dm;

mais, aux corps extérieurs qui exercent l'action $\mathcal{A}_e(\rho, x, y, z, t)$, adjoignons d'autres corps exerçant précisément une action égale à $\mathcal{A}_i(\rho, x, y, z, t)$. Pour conserver à l'élément dm sa densité et son état de repos ou de mouvement, il faudra appliquer à sa surface une pression Π donnée par l'égalité (198).

Supposons ces corps extérieurs fictifs choisis de telle manière que la forme de la fonction $\mathcal{A}_i(\rho, x, y, z, t)$ demeure invariable. A des variations $\delta\rho$, δT de la densité ρ et de la température T correspondrait une variation $\delta\Pi$ de la pression Π donnée par l'égalité

$$(199)\qquad \delta\Pi + \rho\left[2\left(\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_e - \frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right) + \rho\left(\frac{\partial\mathcal{A}_i}{\partial\rho} + \frac{\partial\mathcal{A}_e}{\partial\rho} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2}\right)\right]\delta\rho - \rho^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}\delta T = 0.$$

Posons

$$(200)\qquad J(\rho, T, x, y, z, t) = \rho\left[2\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} - \mathcal{A}_i - \mathcal{A}_e\right) + \rho\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2} - \frac{\partial\mathcal{A}_i}{\partial\rho} - \frac{\partial\mathcal{A}_e}{\partial\rho}\right)\right].$$

L'égalité (199) nous enseigne que si, dans la modification définie plus haut à laquelle cette égalité se rapporte, la température T demeure invariable, la densité ρ augmente de $\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T \delta\Pi$, avec

$$(201)\qquad \left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T = \frac{1}{J},$$

tandis que si la pression Π demeure invariable, la densité augmente de $\left(\frac{d\rho}{dT}\right)_\Pi \delta T$, avec

$$(202)\qquad \left(\frac{d\rho}{dT}\right)_\Pi = -\frac{\rho^2}{J}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}.$$

Au sein d'un fluide qui est en état d'équilibre stable, on a [1]

$$(203)\qquad J > 0.$$

Toutes les fois que cette inégalité est vérifiée, $\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T$ est positif et $\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}$ est de signe contraire à $\left(\frac{d\rho}{dT}\right)_\Pi$.

Considérons une modification du genre de celles que nous venons de définir et où la pression Π garde une valeur invariable; ρ croît de $\left(\frac{d\rho}{dT}\right)_\Pi \delta T$; selon les éga-

---

(1) *Sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles* [*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. III, p. 174; condition (63); 1897].

lités (194) et (195), la quantité de chaleur dégagée par l'élément dm devient

$$dQ = \left[\frac{T}{E}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}\left(\frac{d\rho}{dT}\right)_{\Pi} - c(\rho, T)\right]\delta T$$

ou bien, en vertu de l'égalité (202),

(204) $$dQ = - C(\rho, T, x, y, z, t)\,\delta T,$$

en posant

(205) $$C(\rho, T, x, y, z, t) = c(\rho, T) + \frac{T}{E}\frac{\rho^2}{J(\rho, T, x, y, z, t)}\left[\frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial \rho\, \partial T}\right]^2.$$

La quantité $C(\rho, T, x, y, z, t)$ peut, en vertu de l'égalité (204), être regardée comme la *chaleur spécifique à pression constante* de l'élément dm; elle diffère de la chaleur spécifique à densité constante par un caractère essentiel; pour la connaître, il ne suffit pas de connaître la densité ρ et la température T au sein de l'élément dm; il faut en outre connaître la disposition et l'état des corps dont proviennent les actions extérieures, la figure du fluide et la distribution des masses au sein de cette figure.

Si la condition de stabilité (203) *est satisfaite, la chaleur spécifique à pression constante* $C(\rho, T, x, y, z, t)$ *est, en chaque point, supérieure à la chaleur spécifique à densité constante.*

Considérons une des modifications pour lesquelles est écrite l'égalité (199) et supposons qu'elle constitue, pour l'élément dm, une modification *isentropique.*

L'entropie $\sigma(\rho, T)\, dm$ de l'élément dm est définie par l'égalité [Ire Partie, égalité (85)]

$$\sigma(\rho, T) = -\frac{1}{E}\frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T}.$$

On a donc, en une modification isentropique quelconque,

(206) $$\frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial \rho\, \partial T}\delta\rho + \frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial T^2}\delta T = 0.$$

Entre les égalités (199) et (206), éliminons δT et remplaçons $\delta\rho$ par $\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_Q \delta\Pi$. Nous trouverons, en tenant compte de l'égalité (200),

(207) $$\left[J\frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2} - \rho^2\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}\right)^2\right]\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_Q = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2},$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\left[-\frac{T}{E}\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2}+\frac{T}{E}\frac{\rho^2}{J}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}\right)^2\right]\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_Q=-\frac{1}{J}\frac{T}{E}\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2}$$

ou bien, en vertu des égalités (201), (195) et (204),

$$C(\rho, T, x, y, z, t)\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_Q=c(\rho, T)\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T, \tag{208}$$

égalité qui est la généralisation de la classique *relation de Reech*.

La relation (206), qui exprime que la modification est isentropique, peut s'écrire, en vertu de l'égalité (202),

$$\delta T=-\frac{J\left(\frac{d\rho}{dT}\right)_\Pi}{\rho^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2}}\delta\rho$$

ou bien, en vertu de l'égalité (195),

$$\delta T=\frac{TJ\left(\frac{d\rho}{dT}\right)_\Pi}{Ec(\rho, T)}\delta\rho.$$

Mais ici $\delta\rho=\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_Q\delta\Pi$; si donc on tient compte des égalités (201) et (208) et si l'on remplace δT par $\left(\frac{dT}{d\Pi}\right)_Q\delta\Pi$, on trouve l'égalité

$$\left(\frac{dT}{d\Pi}\right)_Q=\frac{T}{EC(\rho, T, x, y, z, t)}\left(\frac{d\rho}{dT}\right)_\Pi,$$

ce qui est la généralisation d'une relation due à Joule.

Ainsi, toutes les lois que l'on démontre, en Thermodynamique élémentaire, pour un fluide soumis uniquement à une pression normale et uniforme, s'étendent à un fluide dont les éléments exercent les uns sur les autres des actions quelconques, newtoniennes ou non. Mais tandis que, dans le premier cas, ces lois sont générales, elles ne s'appliquent, dans le second cas, qu'à certaines modifications virtuelles définies d'une manière particulière, à savoir celles pour lesquelles il est permis d'écrire la relation (199).

Malgré le caractère abstrait et, semble-t-il, purement artificiel, des considérations que nous venons de développer, nous allons en reconnaître l'intérêt par l'étude de la propagation des ondes au sein des fluides parfaits.

§ 2. — Propagation des ondes au sein des fluides parfaits. Emploi des équations d'Euler.

La propagation des ondes dans les fluides parfaits a déjà fait l'objet de recherches extrêmement importantes de la part d'Hugoniot (¹); c'est à cette occasion qu'ont été imaginées les méthodes développées aux Chapitres II, III et IV du présent écrit. Toutefois, l'analyse d'Hugoniot est susceptible de certains développements et de certaines généralisations (²) que favorise singulièrement l'emploi des vecteurs de M. Hadamard.

Cette étude de la propagation des ondes dans les fluides parfaits peut se faire, comme l'a déjà observé Hugoniot, soit au moyen des équations hydrodynamiques dites *équations d'Euler*, soit au moyen des équations hydrodynamiques dites *équations de Lagrange*; nous allons employer successivement ces deux procédés, en usant d'abord des équations d'Euler.

Pour obtenir les équations d'Euler, il suffit de prendre les équations générales de l'Hydrodynamique [Iʳᵉ Partie, égalités (79)] et d'y annuler les fonctions $\lambda(\rho, T)$, $\mu(\rho, T)$. Nous obtenons alors les équations

$$(209)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Pi}{\partial x} - \rho(X_i + X_e) + \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial y} - \rho(Y_i + Y_e) + \rho\left(\dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial z} - \rho(Z_i + Z_e) + \rho\left(\dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z}\right) = 0. \end{cases}$$

A ces équations, il faut joindre l'*équation de continuité*

$$(210)\quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\rho u + \frac{\partial}{\partial y}\rho v + \frac{\partial}{\partial z}\rho w = 0,$$

dans le cas où le fluide est compressible, la relation

$$(198)\quad \Pi + \rho^2[\mathcal{V}_i(\rho, x, y, z, t) + \mathcal{V}_e(\rho, x, y, z, t)] - \rho^2\frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} = 0$$

et, enfin, la *relation supplémentaire*.

(¹) Hugoniot, *Mémoire sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfini* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4ᵉ série, t. III, 1887, p. 188, et t. IV, 1888, p. 153).

(²) *Sur les ondes longitudinales et transversales dans les fluides parfaits* (*Comptes rendus*, t. CXXXII, 3 juin 1901, p. 1303).

Imaginons qu'une surface σ soit onde persistante du premier ordre pour u, v, w. Il existera un vecteur (l_0, m_0, n_0) tel que, sur la surface σ,

$$(211)\quad \left\{\begin{array}{llll} \dfrac{\partial(u_2-u_1)}{\partial x}=\alpha l_0, & \dfrac{\partial(u_2-u_1)}{\partial y}=\beta l_0, & \dfrac{\partial(u_2-u_1)}{\partial z}=\gamma l_0, & \dfrac{\partial(u_2-u_1)}{\partial t}+\mathfrak{N} l_0=0, \\ \dfrac{\partial(v_2-v_1)}{\partial x}=\alpha m_0, & \dfrac{\partial(v_2-v_1)}{\partial y}=\beta m_0, & \dfrac{\partial(v_2-v_1)}{\partial z}=\gamma m_0, & \dfrac{\partial(v_2-v_1)}{\partial t}+\mathfrak{N} m_0=0, \\ \dfrac{\partial(w_2-w_1)}{\partial x}=\alpha n_0, & \dfrac{\partial(w_2-w_1)}{\partial y}=\beta n_0, & \dfrac{\partial(w_2-w_1)}{\partial z}=\gamma n_0, & \dfrac{\partial(w_2-w_1)}{\partial t}+\mathfrak{N} n_0=0. \end{array}\right.$$

Moyennant ces égalités, on a, sur la surface σ,

$$(212)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u_2}{\partial t}+u\dfrac{\partial u_2}{\partial x}+v\dfrac{\partial u_2}{\partial y}+w\dfrac{\partial u_2}{\partial z} \\ \quad -\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial t}+u\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+v\dfrac{\partial u_1}{\partial y}+w\dfrac{\partial u_1}{\partial z}\right)=(\alpha u+\beta v+\gamma w-\mathfrak{N})l_0, \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial t}+u\dfrac{\partial v_2}{\partial x}+v\dfrac{\partial v_2}{\partial y}+w\dfrac{\partial v_2}{\partial z} \\ \quad -\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial t}+u\dfrac{\partial v_1}{\partial x}+v\dfrac{\partial v_1}{\partial y}+w\dfrac{\partial v_1}{\partial z}\right)=(\alpha u+\beta v+\gamma w-\mathfrak{N})m_0, \\ \dfrac{\partial w_2}{\partial t}+u\dfrac{\partial w_2}{\partial x}+v\dfrac{\partial w_2}{\partial y}+w\dfrac{\partial w_2}{\partial z} \\ \quad -\left(\dfrac{\partial w_1}{\partial t}+u\dfrac{\partial w_1}{\partial x}+v\dfrac{\partial w_1}{\partial y}+w\dfrac{\partial w_1}{\partial z}\right)=(\alpha u+\beta v+\gamma w-\mathfrak{N})n_0. \end{array}\right.$$

D'après ce que nous avons vu au Chapitre I, § 11, la surface σ, au travers de laquelle les composantes de la vitesse varient d'une manière continue, est onde au moins du premier ordre pour la pression Π et la densité ρ; il existe donc deux grandeurs P_0, R_0 telles que l'on ait, en tout point de la surface σ,

$$(213)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial x}=\alpha P_0, \quad \dfrac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial y}=\beta P_0, \quad \dfrac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial z}=\gamma P_0, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial t}+\mathfrak{N} P_0=0, \end{array}\right.$$

$$(214)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial(\rho_2-\rho_1)}{\partial x}=\alpha R_0, \quad \dfrac{\partial(\rho_2-\rho_1)}{\partial y}=\beta R_0, \quad \dfrac{\partial(\rho_2-\rho_1)}{\partial z}=\gamma R_0, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial(\rho_2-\rho_1)}{\partial t}+\mathfrak{N} R_0=0. \end{array}\right.$$

Moyennant les égalités (211) et (214), l'équation de continuité (210) montre

que l'on a, en tout point de la surface σ,

$$(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N}) R_0 + \rho(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0) = 0. \tag{215}$$

En traversant la surface σ, les grandeurs X_e, Y_e, Z_e varient certainement d'une manière continue; il est aisé de voir qu'il en est de même de X_i, Y_i, Z_i; si, en effet, on se reporte à la définition de la fonction $\varphi_i(R, x, y, z, t)$ donnée en la Ire Partie, Chapitre I, § 4, on voit que X_i, Y_i, Z_i s'obtiennent en remplaçant R par $\rho(x, y, z, t)$ dans $-\frac{\partial\varphi}{\partial x}, -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$; or, d'après ce qui a été supposé en cet endroit, la continuité de ρ assure la continuité de $-\frac{\partial\varphi}{\partial x}, -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$.

Les égalités (209), (212), (213) nous montrent alors que l'on a, en tout point de la surface σ,

$$\left\{\begin{aligned} &P_0\alpha + \rho(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N}) l_0 = 0, \\ &P_0\beta + \rho(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N}) m_0 = 0, \\ &P_0\gamma + \rho(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N}) n_0 = 0. \end{aligned}\right. \tag{216}$$

Les égalités (215) et (216) sont vraies aussi bien pour les fluides compressibles que pour les fluides incompressibles, et cela quelle que soit la forme de la relation supplémentaire. Discutons, tout d'abord, les conséquences de ces égalités.

Multiplions respectivement les égalités (216) par α, β, γ et ajoutons membre à membre les égalités obtenues; nous trouvons l'égalité

$$P_0 + \rho(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N})(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0) = 0. \tag{217}$$

D'autre part, multiplions respectivement les égalités (216) par l_0, m_0, n_0 et ajoutons membre à membre les résultats obtenus. Nous trouvons l'égalité

$$P_0(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0) + \rho(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N})(l_0^2 + m_0^2 + n_0^2) = 0. \tag{218}$$

Parvenus à ce point, nous distinguerons deux cas :

Premier cas. — *L'onde, du premier ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse, est d'ordre supérieur au premier pour la densité ρ :*

$$R_0 = 0. \tag{219}$$

Ce cas est évidemment le seul qui puisse se présenter en un fluide incompressible.

Les égalités (219) et (215) donnent

$$\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0 = 0. \tag{220}$$

Selon la dénomination introduite au Chapitre II, § 5, l'onde est transversale.

L'égalité (217) donne alors

$$(221) \qquad P_0 = 0.$$

L'onde est d'ordre supérieur au premier par rapport à la pression.

Enfin, l'égalité (218) donne

$$(222) \qquad \mathfrak{N} = \alpha u + \beta v + \gamma w.$$

Les deux masses fluides que sépare l'onde considérée demeurent les mêmes pendant toute la durée du mouvement.

Moyennant les trois égalités (215), (217), (218), il est très facile de voir que chacune des quatre égalités (219), (220), (221), (222) a pour conséquence les trois autres. Donc, *chacune des quatre propositions que nous venons d'énoncer entraîne les trois autres.*

Deuxième cas. — *L'onde, du premier ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse, est aussi du premier ordre par rapport à la densité ρ.*

Dans ce cas, on n'a pas l'égalité (219) et, partant, on ne peut avoir aucune des trois égalités (220), (221), (222); en particulier, on n'a pas

$$(221) \qquad P_0 = 0.$$

L'onde considérée est certainement du premier ordre par rapport à la pression.

Comme on n'a ni l'égalité (221), ni l'égalité (222), les égalités (216) donnent

$$(223) \qquad \frac{l_0}{\alpha} = \frac{m_0}{\beta} = \frac{n_0}{\gamma}.$$

Selon la terminologie définie au Chapitre II, § 5, l'onde considérée est longitudinale.

Les égalités (215) et (217) donnent

$$[(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N})^2 R_0 - P_0](\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0) = 0.$$

Dans le cas actuel, où aucune des égalités (219), (220), (221) n'est vérifiée, cette égalité devient

$$(224) \qquad (\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{P_0}{R_0}.$$

Elle fait connaître la valeur de $\mathfrak{N}$.

Pour pousser plus loin et déterminer la valeur de $\frac{P_0}{R_0}$, il faut faire usage de l'égalité (198) (ce qui est assurément permis, puisque ce second cas ne peut se rencontrer qu'en un fluide compressible) et de la relation supplémentaire.

En tenant compte de la définition de J, donnée par l'égalité (200), l'égalité (198) nous donne

$$\frac{\partial H}{\partial x} - J\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho^2 \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_e) - \rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}\frac{\partial T}{\partial x} = 0. \tag{225}$$

L'onde considérée étant au moins du premier ordre pour la température T (Chapitre I, § II), il existe une grandeur Θ_0 telle qu'en tout point de la surface σ

$$\frac{\partial(T_2 - T_1)}{\partial x} = \alpha\Theta_0, \qquad \frac{\partial(T_2 - T_1)}{\partial y} = \beta\Theta_0, \qquad \frac{\partial(T_2 - T_1)}{\partial z} = \gamma\Theta_0. \tag{226}$$

Au passage de la surface σ, $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}$ varie d'une manière continue comme ρ et T; selon les principes posés en la Ire Partie, Chapitre I, § 4, il en est de même de $\mathcal{A}_i$, $\frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial \rho}$, $\frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial x}$; enfin, il en est assurément de même de $\mathcal{A}_e$ et de ses dérivées partielles, partant de J. Dès lors, les égalités (213), (214), (225), (226) donnent, en tout point de la surface σ, la première des égalités

$$\left(P_0 - JR_0 - \rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}\Theta_0\right)\alpha = 0,$$
$$\left(P_0 - JR_0 - \rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}\Theta_0\right)\beta = 0,$$
$$\left(P_0 - JR_0 - \rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}\Theta_0\right)\gamma = 0.$$

Les deux dernières s'établissent d'une manière analogue. Ces égalités donnent

$$P_0 - JR_0 - \rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}\Theta_0 = 0. \tag{227}$$

Parvenus à ce point, nous devons scinder notre deuxième cas :

A. Le fluide est bon conducteur de la chaleur. — Dans ce cas, selon des considérations exposées au Chapitre III, § I, considérations qui s'appliquent aussi bien aux fluides parfaits qu'aux fluides visqueux, on a

$$\Theta_0 = 0. \tag{154}$$

L'onde est d'ordre supérieur au premier par rapport à la température.

L'égalité (227) donne alors

$$\frac{P_0}{R_0} = J,$$

en sorte que l'égalité (224) devient

$$(\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = J. \tag{228}$$

Elle nous enseigne qu'*une onde longitudinale du premier ordre ne peut persister qu'au sein d'un fluide où la condition* (203) *est vérifiée.*

Selon l'égalité (201), l'égalité (228) peut encore s'écrire

$$(\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{1}{\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T}. \tag{228 bis}$$

B. Le fluide est mauvais conducteur de la chaleur. — Dans le temps dt, chaque élément $d\varpi$ dégage une quantité de chaleur égale à o. Selon l'égalité (90) de la Ire Partie, cette condition s'écrit

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x}u + \frac{\partial T}{\partial y}v + \frac{\partial T}{\partial z}w\right) - \rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0. \tag{229}$$

Selon les égalités (211) et (226), elle nous enseigne que l'on a, en tout point de la surface σ,

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2}(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N})\Theta_0 - \rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0) = 0. \tag{230}$$

Comme on n'a certainement ni l'égalité (220), ni l'égalité (222), Θ_0 a une valeur finie et différente de o. *L'onde considérée est assurément du premier ordre par rapport à la température.*

Les égalités (215) et (230) donnent

$$\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2}\Theta_0 + \frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}R_0\right)(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N}) = 0,$$

ou bien, puisque l'égalité (222) n'est sûrement pas vérifiée,

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2}\Theta_0 + \frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}R_0 = 0.$$

L'égalité (227) devient alors

$$\frac{P_0}{R_0} = J - \frac{\rho^2\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}\right)^2}{\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2}}.$$

L'égalité (224) devient donc

$$(231) \qquad (\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = J - \frac{\rho^2\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}\right)^2}{\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2}}.$$

Selon le postulatum de Helmholtz [inégalité (196)], $\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2}$ est assurément négatif, le second membre de l'égalité (231) est donc certainement positif, partout où la condition (203) est vérifiée.

En vertu de l'égalité (207), l'égalité (231) peut s'écrire

$$(232) \qquad (\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{1}{\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_Q}.$$

En vertu de l'égalité (208), l'égalité (232) devient

$$(233) \qquad (\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{1}{\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T} \frac{C(\rho, T, x, y, z, t)}{c(\rho, T)}.$$

L'égalité (154) s'applique, au sein d'un fluide bon conducteur, aussi bien à une onde transversale qu'à une onde longitudinale; il en est de même de l'égalité (227), si le fluide est mauvais conducteur et compressible; mais, dans ce cas, on a, en tout point d'une onde transversale,

$$P_0 = 0, \qquad R_0 = 0,$$

en sorte que l'égalité (227) redonne

$$(154) \qquad \Theta_0 = 0.$$

On peut donc compléter ainsi qu'il suit ce que nous savons déjà des ONDES TRANSVERSALES :

Au sein d'un fluide bon conducteur, ou bien au sein d'un fluide compressible et mauvais conducteur, une onde transversale du premier ordre par rapport à u, v, w est d'ordre supérieur à 1 par rapport à T. Au sein d'un fluide incompressible et mauvais conducteur, elle peut être du premier ordre par rapport à T.

Les diverses propositions que nous venons de démontrer touchant les ondes du premier ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse s'établissent sans peine pour les ondes d'ordre supérieur au premier; les méthodes à suivre sont

analogues à celles dont nous avons fait usage dans le cas des fluides visqueux, mais elles sont d'un emploi beaucoup plus simple. Nous laissons au lecteur le soin de les développer et nous nous bornerons à énoncer les théorèmes généraux que voici :

Au sein d'un fluide parfait, soumis à des actions newtoniennes ou non, il peut persister en général deux sortes d'onde d'ordre n par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse (n étant au moins égal à 1). *La première sorte est seule possible si le fluide est incompressible :*

1° Des ondes transversales. — *Ces ondes sont au moins d'ordre* $(n+1)$ *par rapport à la densité et à la pression. Les deux masses fluides que sépare une telle onde sont les mêmes pendant toute la durée du mouvement, en sorte que la vitesse du déplacement de l'onde est donnée par la formule*

$$\mathfrak{N} = \alpha u + \beta v + \gamma w. \tag{222}$$

Enfin cette onde est au moins d'ordre $(n+1)$ *par rapport à* T, *à moins que le fluide ne soit incompressible et mauvais conducteur, cas auquel elle peut être d'ordre n par rapport à* T.

2° Des ondes longitudinales. — *Ces ondes sont aussi d'ordre n pour la densité et pour la pression.*

Au sein d'un fluide bon conducteur, *une telle onde est au moins d'ordre* $(n+1)$ *par rapport à la température* T *et sa vitesse de déplacement est donnée par la formule*

$$(\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{1}{\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T}. \tag{228 bis}$$

Au sein d'un fluide mauvais conducteur, *une telle onde est d'ordre n par rapport à la température* T *et sa vitesse de déplacement est donnée par la formule*

$$(\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{1}{\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T} \frac{C(\rho, T, x, y, z, t)}{c(\rho, T)}. \tag{233}$$

Cette dernière formule est la généralisation de celle que Laplace a donnée pour la vitesse de propagation du son dans l'air.

On remarquera l'analogie qui existe entre les résultats que nous venons d'obtenir pour les ondes d'ordre au moins égal à 1 par rapport à u, v, w et les résultats qui ont été énoncés, à la fin du § 8 et aux §§ 9 et 10 du Chapitre I, pour les surfaces de discontinuité ou ondes d'ordre 0 par rapport à u, v, w.

§ 3. — La méthode de Lagrange. — Considérations cinématiques.

Les problèmes relatifs aux fluides parfaits peuvent être traités par une méthode, distincte de la précédente, que l'on nomme habituellement *méthode de Lagrange*. Vu l'importance des résultats que nous venons d'obtenir par la méthode dite *d'Euler*, nous allons chercher à les retrouver par la méthode dite *de Lagrange*.

Nous allons tout d'abord rappeler quelques formules, de nature cinématique, obtenues par cette méthode.

Dans la méthode de Lagrange, chaque point matériel est déterminé par ses coordonnées a, b, c, à un instant t_0 choisi une fois pour toutes; les coordonnées x, y, z de ce même point matériel à l'instant t sont des fonctions continues et uniformes de a, b, c, t :

$$(234)\qquad \begin{cases} x = x(a, b, c, t), \\ y = y(a, b, c, t), \\ z = z(a, b, c, t). \end{cases}$$

Soit $f(a, b, c, t)$ une fonction des variables a, b, c, t; nous conviendrons d'employer les notations suivantes :

$$df = \frac{\partial f}{\partial a}da + \frac{\partial f}{\partial b}db + \frac{\partial f}{\partial c}dc + \frac{\partial f}{\partial t}dt,$$

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial a}da + \frac{\partial f}{\partial b}db + \frac{\partial f}{\partial c}dc.$$

Selon ces notations,

$$da = \Delta a, \qquad db = \Delta b, \qquad dc = \Delta c.$$

Ces notations nous permettent d'écrire, en vertu des égalités (234),

$$(235)\qquad \begin{cases} \Delta x = \dfrac{\partial x}{\partial a}\Delta a + \dfrac{\partial x}{\partial b}\Delta b + \dfrac{\partial x}{\partial c}\Delta c, \\ \Delta y = \dfrac{\partial y}{\partial a}\Delta a + \dfrac{\partial y}{\partial b}\Delta b + \dfrac{\partial y}{\partial c}\Delta c, \\ \Delta z = \dfrac{\partial z}{\partial a}\Delta a + \dfrac{\partial z}{\partial b}\Delta b + \dfrac{\partial z}{\partial c}\Delta c. \end{cases}$$

Posons

$$(236)\qquad \Theta(a, b, c, t) = \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial a} & \dfrac{\partial x}{\partial b} & \dfrac{\partial x}{\partial c} \\ \dfrac{\partial y}{\partial a} & \dfrac{\partial y}{\partial b} & \dfrac{\partial y}{\partial c} \\ \dfrac{\partial z}{\partial a} & \dfrac{\partial z}{\partial b} & \dfrac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}$$

et résolvons les équations (235) par rapport à Δa, Δb, Δc; nous trouverons, en faisant usage de la notation des déterminants fonctionnels,

$$(237)\quad \begin{cases} \mathfrak{O}\,\Delta a = \dfrac{D(y,z)}{D(b,c)}\Delta x + \dfrac{D(z,x)}{D(b,c)}\Delta y + \dfrac{D(x,y)}{D(b,c)}\Delta z, \\ \mathfrak{O}\,\Delta b = \dfrac{D(y,z)}{D(c,a)}\Delta x + \dfrac{D(z,x)}{D(c,a)}\Delta y + \dfrac{D(x,y)}{D(a,b)}\Delta z, \\ \mathfrak{O}\,\Delta c = \dfrac{D(y,z)}{D(a,b)}\Delta x + \dfrac{D(z,x)}{D(a,b)}\Delta y + \dfrac{D(x,y)}{D(c,a)}\Delta z. \end{cases}$$

Supposons que, résolvant les égalités (234) par rapport à a, b, c, on exprime ces quantités en fonctions de x, y, z, t :

$$(238)\quad \begin{cases} a = a(x, y, z, t), \\ b = b(x, y, z, t), \\ c = c(x, y, z, t). \end{cases}$$

Les égalités (237) nous donneront immédiatement

$$(239)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial x} = \dfrac{1}{\mathfrak{O}}\dfrac{D(y,z)}{D(b,c)}, & \dfrac{\partial a}{\partial y} = \dfrac{1}{\mathfrak{O}}\dfrac{D(z,x)}{D(b,c)}, & \dfrac{\partial a}{\partial z} = \dfrac{1}{\mathfrak{O}}\dfrac{D(x,y)}{D(b,c)}, \\ \dfrac{\partial b}{\partial x} = \dfrac{1}{\mathfrak{O}}\dfrac{D(y,z)}{D(c,a)}, & \dfrac{\partial b}{\partial y} = \dfrac{1}{\mathfrak{O}}\dfrac{D(z,x)}{D(c,a)}, & \dfrac{\partial b}{\partial z} = \dfrac{1}{\mathfrak{O}}\dfrac{D(x,y)}{D(c,a)}, \\ \dfrac{\partial c}{\partial x} = \dfrac{1}{\mathfrak{O}}\dfrac{D(y,z)}{D(a,b)}, & \dfrac{\partial c}{\partial y} = \dfrac{1}{\mathfrak{O}}\dfrac{D(z,x)}{D(a,b)}, & \dfrac{\partial c}{\partial z} = \dfrac{1}{\mathfrak{O}}\dfrac{D(x,y)}{D(a,b)}. \end{cases}$$

Considérons une certaine surface $S(t)$, variable avec le temps t, tracée dans l'espace des x, y, z. Son équation est

$$(240)\quad \Phi(x, y, z, t) = 0.$$

Si, dans cette égalité, on remplace x, y, z par leurs expressions (234), on obtient une nouvelle équation

$$(241)\quad \varphi(a, b, c, t) = 0,$$

qui est l'équation d'une surface $s(t)$, variable avec le temps t et tracée dans l'espace des a, b, c. Les deux surfaces $S(t)$, $s(t)$ sont dites *correspondantes*. Les égalités (234) ou les égalités équivalentes (238) font correspondre point par point la surface $S(t)$ et la surface $s(t)$.

En un point M de la surface $S(t)$, la normale a pour cosinus directeurs α, β, γ et l'on a

$$(242)\quad \frac{\alpha}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}} = \frac{\beta}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}} = \frac{\gamma}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}}$$

Au point m, correspondant du point M, la surface $s(t)$ admet une normale dont λ, μ, ν sont les cosinus directeurs, et l'on a

$$(243)\qquad \frac{\lambda}{\frac{\partial\varphi}{\partial a}} = \frac{\mu}{\frac{\partial\varphi}{\partial b}} = \frac{\nu}{\frac{\partial\varphi}{\partial c}}.$$

En vertu des égalités (238), les égalités (242) peuvent s'écrire

$$\frac{\alpha}{\frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x}}
= \frac{\beta}{\frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial y}}
= \frac{\gamma}{\frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial z}}.$$

En vertu des égalités (239) et (243), ces égalités prennent la forme

$$(244)\qquad \frac{\alpha}{L} = \frac{\beta}{M} = \frac{\gamma}{N},$$

où l'on a posé

$$(245)\qquad \left\{\begin{aligned}
L &= \frac{D(y, z)}{D(b, c)}\lambda + \frac{D(y, z)}{D(c, a)}\mu + \frac{D(y, z)}{D(a, b)}\nu,\\
M &= \frac{D(z, x)}{D(b, c)}\lambda + \frac{D(z, x)}{D(c, a)}\mu + \frac{D(z, x)}{D(a, b)}\nu,\\
N &= \frac{D(x, y)}{D(b, c)}\lambda + \frac{D(x, y)}{D(c, a)}\mu + \frac{D(x, y)}{D(a, b)}\nu.
\end{aligned}\right.$$

Les formules (244) et (245) permettent de calculer α, β, γ lorsque l'on connaît λ, μ, ν.

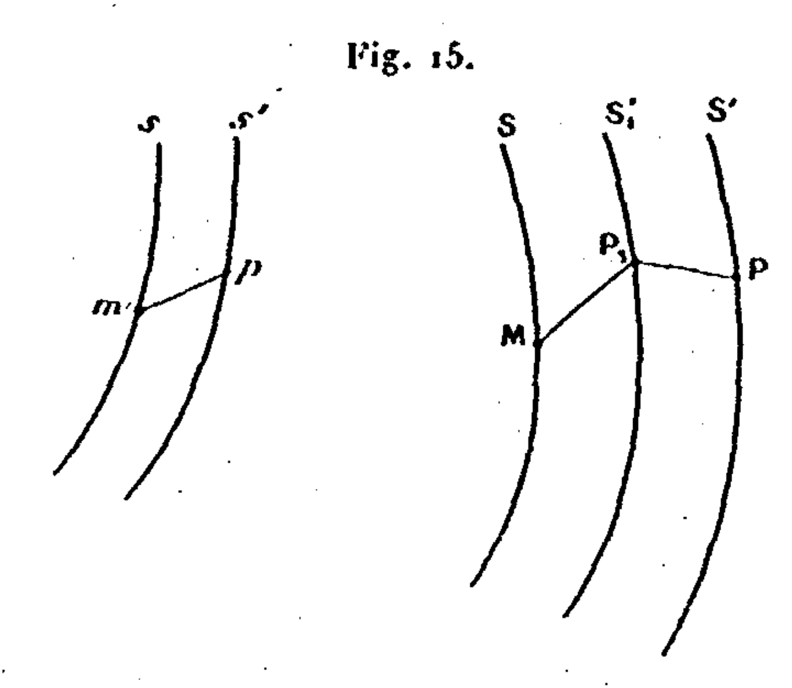
La surface $S(t)$ occupe la position S à l'instant t (*fig.* 15) et la position S' à l'instant $(t + dt)$ dans l'espace des x, y, z. Les points matériels qui, à l'instant $(t + dt)$, se trouvent sur la surface S', se trouvaient, à l'instant t, sur la surface S'_1.

A la surface S correspond, dans l'espace des a, b, c, une surface s. Aux deux surfaces S', S'_1, lieux, à des instants différents, des mêmes points matériels, correspond, dans l'espace des a, b, c, une même surface s'.

Soient M un point de la surface S et m le point correspondant de la surface s. La distance normale du point M à la surface S', comptée positivement dans la

direction dont α, β, γ sont les cosinus directeurs, sera désignée par $\mathfrak{N}\,dt$. La distance normale du point m à la surface s', comptée positivement dans la direc-

Fig. 15.



tion dont λ, μ, ν sont les cosinus directeurs, sera désignée par $n\,dt$. Cherchons quelle relation existe entre n et $\mathfrak{N}$.

Sur la surface s', prenons un point p voisin du point m; si a, b, c sont les coordonnées du point m, $a + \Delta a$, $b + \Delta b$, $c + \Delta c$ seront celles du point p. La projection du segment mp sur la direction dont λ, μ, ν sont les cosinus directeurs sera précisément $n\,dt$. On a donc

$$n\,dt = \lambda\,\Delta a + \mu\,\Delta b + \nu\,\Delta c. \tag{246}$$

Au point p correspond un point P sur la surface S et un point P_1 sur la surface S_1.

Les composantes du segment MP_1 sont Δx, Δy, Δz, ces quantités étant liées à $\Delta a, \Delta b, \Delta c$ par les égalités (235) ou, ce qui revient au même, par les égalités (237). Quant au segment P_1P, ses composantes sont $\frac{\partial x}{\partial t}\,dt$, $\frac{\partial y}{\partial t}\,dt$, $\frac{\partial z}{\partial t}\,dt$.

La projection du contour MP_1P sur la direction dont α, β, γ sont les cosinus directeurs doit donner précisément $\mathfrak{N}\,dt$. On a donc

$$\mathfrak{N}\,dt = \left(\alpha\frac{\partial x}{\partial t} + \beta\frac{\partial y}{\partial t} + \gamma\frac{\partial z}{\partial t}\right)dt + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y + \gamma\,\Delta z. \tag{247}$$

En vertu des égalités (237) et (245), l'égalité (246) peut s'écrire

$$n\,dt = \frac{L\,\Delta x + M\,\Delta y + N\,\Delta z}{\omega}. \tag{248}$$

En vertu des égalités (244), l'égalité (247) peut s'écrire

$$\left(\mathfrak{N} - \alpha\frac{\partial x}{\partial t} - \beta\frac{\partial y}{\partial t} - \gamma\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 dt^2 = \frac{(L\,\Delta x + M\,\Delta y + N\,\Delta z)^2}{L^2 + M^2 + N^2}. \tag{249}$$

Les égalités (248) et (249) donnent

$$(250)\qquad \left(\mathfrak{N} - \alpha\frac{\partial x}{\partial t} - \beta\frac{\partial y}{\partial t} - \gamma\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 = \frac{\mathbb{O}^2}{L^2+M^2+N^2}a^2.$$

Cette formule essentielle est due à Hugoniot ([1]).

La masse du fluide qu'à l'instant t contient une surface fermée S, tracée dans l'espace des x, y, z, a pour valeur

$$\iiint \rho(x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz,$$

l'intégrale s'étendant au volume qu'enclôt la surface S. Par le changement de variables que représentent les équations (234), cette intégrale devient

$$(251)\qquad \iiint \rho(a, b, c, t)\, \mathbb{O}(a, b, c, t)\, da\, db\, dc,$$

l'intégrale s'étendant au volume enclos par la surface s, qui correspond à la surface S dans l'espace des a, b, c.

Supposons que la première intégrale exprime la masse invariable d'une partie du fluide toujours identique à elle-même. La surface S variera avec t, mais la surface s demeurera invariable, et il en devra être de même de l'intégrale (251).

Donc l'intégrale (251), étendue au volume que renferme une surface invariable quelconque s, tracée dans l'espace des a, b, c, garde une valeur indépendante de t. Il faut et il suffit pour cela que l'on ait

$$(252)\qquad \frac{\partial}{\partial t}[\rho(a, b, c, t)\, \mathbb{O}(a, b, c, t)] = 0.$$

Cette égalité bien connue représente l'*équation de continuité* dans le système dit *de Lagrange*.

On peut l'écrire plus explicitement

$$\mathbb{O}(a, b, c, t)\frac{\partial \rho(a, b, c, t)}{\partial t} + \rho(a, b, c, t)\frac{\partial \mathbb{O}(a, b, c, t)}{\partial t} = 0$$

ou bien, en vertu de l'égalité (236), qui définit $\mathbb{O}(a, b, c, t)$,

$$(253)\qquad \begin{aligned} \mathbb{O}\frac{\partial \rho}{\partial t} &+ \frac{D(y, z)}{D(b, c)}\frac{\partial^2 x}{\partial a\, \partial t} + \frac{D(y, z)}{D(c, a)}\frac{\partial^2 x}{\partial b\, \partial t} + \frac{D(y, z)}{D(a, b)}\frac{\partial^2 x}{\partial c\, \partial t} \\ &+ \frac{D(z, x)}{D(b, c)}\frac{\partial^2 y}{\partial a\, \partial t} + \frac{D(z, x)}{D(c, a)}\frac{\partial^2 y}{\partial b\, \partial t} + \frac{D(z, x)}{D(a, b)}\frac{\partial^2 y}{\partial c\, \partial t} \\ &+ \frac{D(x, y)}{D(b, c)}\frac{\partial^2 z}{\partial a\, \partial t} + \frac{D(x, y)}{D(c, a)}\frac{\partial^2 z}{\partial b\, \partial t} + \frac{D(x, y)}{D(a, b)}\frac{\partial^2 z}{\partial c\, \partial t} = 0. \end{aligned}$$

([1]) HUGONIOT, *Mémoire sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfini*, seconde Partie (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. IV, 1888, p. 153).

§ 4. — Propagation des ondes au sein des fluides parfaits. Emploi de la méthode de Lagrange.

Il est clair que nous avons

$$u = \frac{\partial x}{\partial t}, \qquad v = \frac{\partial y}{\partial t}, \qquad w = \frac{\partial z}{\partial t}, \tag{254}$$

$$\gamma_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \qquad \gamma_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \qquad \gamma_z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \tag{255}$$

En vertu des égalités (255) et en supposant le fluide parfait, ce qui entraîne

$$q_x = 0, \qquad q_y = 0, \qquad q_z = 0,$$

les équations générales de l'Hydrodynamique [première Partie, égalité (74)] deviennent

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \Pi}{\partial x} - \rho(X_i + X_e) + \rho\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0, \\ &\frac{\partial \Pi}{\partial y} - \rho(Y_i + Y_e) + \rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \\ &\frac{\partial \Pi}{\partial z} - \rho(Z_i + Z_e) + \rho\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0. \end{aligned}\right. \tag{256}$$

On a, d'ailleurs,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = \frac{\partial \Pi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial \Pi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial \Pi}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x}.$$

Cette égalité, jointe à la première des égalités (239), transforme la première des égalités (256) en la première des égalités

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{D(y,z)}{D(b,c)}\frac{\partial \Pi}{\partial a} + \frac{D(y,z)}{D(c,a)}\frac{\partial \Pi}{\partial b} + \frac{D(y,z)}{D(a,b)}\frac{\partial \Pi}{\partial c} - \rho\,\varpi\left(X_i + X_e - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right) = 0, \\ &\frac{D(z,x)}{D(b,c)}\frac{\partial \Pi}{\partial a} + \frac{D(z,x)}{D(c,a)}\frac{\partial \Pi}{\partial b} + \frac{D(z,x)}{D(a,b)}\frac{\partial \Pi}{\partial c} - \rho\,\varpi\left(Y_i + Y_e - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) = 0, \\ &\frac{D(x,y)}{D(b,c)}\frac{\partial \Pi}{\partial a} + \frac{D(x,y)}{D(c,a)}\frac{\partial \Pi}{\partial b} + \frac{D(x,y)}{D(a,b)}\frac{\partial \Pi}{\partial c} - \rho\,\varpi\left(Z_i + Z_e - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right) = 0. \end{aligned}\right. \tag{257}$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

Supposons qu'une surface s, mobile avec t et tracée dans l'espace des a, b, c, soit onde du second ordre pour x, y, z et, partant, du premier ordre pour $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$. A cette surface s correspondra, dans l'espace des x, y, z, une surface S,

mobile avec t et qui sera onde du premier ordre pour u, v, w [selon les égalités (254)]. Dès lors, d'après ce que nous avons vu au Chapitre I, § 11, la surface S sera onde au moins du premier ordre pour ρ et Π, et, visiblement, il en sera de même pour la surface s.

Nous pourrons donc, d'après ce qui a été dit au Chapitre II, trouver, en chaque point de la surface s, un vecteur f, g, h et deux grandeurs $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{R}$, tels que l'on ait

$$(258)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2(x_2-x_1)}{\partial a\,\partial t}=\lambda f, & \dfrac{\partial^2(x_2-x_1)}{\partial b\,\partial t}=\mu f, & \dfrac{\partial^2(x_2-x_1)}{\partial c\,\partial t}=\nu f, & \dfrac{\partial^2(x_2-x_1)}{\partial t^2}+nf=0,\\ \dfrac{\partial^2(y_2-y_1)}{\partial a\,\partial t}=\lambda g, & \dfrac{\partial^2(y_2-y_1)}{\partial b\,\partial t}=\mu g, & \dfrac{\partial^2(y_2-y_1)}{\partial c\,\partial t}=\nu g, & \dfrac{\partial^2(y_2-y_1)}{\partial t^2}+ng=0,\\ \dfrac{\partial^2(z_2-z_1)}{\partial a\,\partial t}=\lambda h, & \dfrac{\partial^2(z_2-z_1)}{\partial b\,\partial t}=\mu h, & \dfrac{\partial^2(z_2-z_1)}{\partial c\,\partial t}=\nu h, & \dfrac{\partial^2(z_2-z_1)}{\partial t^2}+nh=0; \end{cases}$$

$$(259)\quad \frac{\partial(\rho_2-\rho_1)}{\partial a}=\lambda\mathfrak{R},\quad \frac{\partial(\rho_2-\rho_1)}{\partial b}=\mu\mathfrak{R},\quad \frac{\partial(\rho_2-\rho_1)}{\partial c}=\nu\mathfrak{R},\quad \frac{\partial(\rho_2-\rho_1)}{\partial t}+n\mathfrak{R}=0,$$

$$(260)\quad \frac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial a}=\lambda\mathfrak{P},\quad \frac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial b}=\mu\mathfrak{P},\quad \frac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial c}=\nu\mathfrak{P},\quad \frac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial t}+n\mathfrak{P}=0.$$

La surface s étant onde du second ordre pour x, y, z, les dérivées partielles du premier ordre de ces quantités varient d'une manière continue en traversant cette surface, et il en est de même de $\mathfrak{O}$ et de tous ses mineurs. Dès lors, les égalités (253), (258) et (259), jointes aux égalités (245), montrent que l'on a, en tout point de la surface s,

$$(261)\qquad \mathfrak{O}\mathfrak{R}n-\rho(Lf+Mg+Nh)=0.$$

D'après ce que nous avons vu en la première Partie, Chapitre I, § 4, X_e, Y_e, Z_e, X_i, Y_i, Z_i varient d'une manière continue lorsqu'on traverse la surface S et, partant, la surface s. Dès lors, les égalités (257), (258) et (260), jointes aux égalités (245), montrent que l'on a, en tout point de la surface s, les trois égalités

$$(262)\qquad \begin{cases} \mathfrak{P}L-\rho\mathfrak{O}nf=0,\\ \mathfrak{P}M-\rho\mathfrak{O}ng=0,\\ \mathfrak{P}N-\rho\mathfrak{O}nh=0. \end{cases}$$

De ces égalités (262) on tire sans peine les deux égalités

$$(263)\qquad \mathfrak{P}(Lf+Mg+Nh)-\rho\mathfrak{O}\,n(f^2+g^2+h^2)=0,$$

$$(264)\qquad \mathfrak{P}(L^2+M^2+N^2)-\rho\mathfrak{O}\,n(Lf+Mg+Nh)=0.$$

Ici, distinguons deux cas :

PREMIER CAS. — *L'onde est d'ordre supérieur à 1 par rapport à la densité* ρ :

$$\mathfrak{R} = 0. \tag{265}$$

L'égalité (261) donne alors

$$Lf + Mg + Nh = 0. \tag{266}$$

Interprétons ce résultat.

En multipliant les deux membres de l'égalité (266) par λ et tenant compte des égalités (258), (254) et (244), nous trouvons la première des égalités

$$\alpha \frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial a} + \beta \frac{\partial(v_2 - v_1)}{\partial a} + \gamma \frac{\partial(w_2 - w_1)}{\partial a} = 0,$$

$$\alpha \frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial b} + \beta \frac{\partial(v_2 - v_1)}{\partial b} + \gamma \frac{\partial(w_2 - w_1)}{\partial b} = 0,$$

$$\alpha \frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial c} + \beta \frac{\partial(v_2 - v_1)}{\partial c} + \gamma \frac{\partial(w_2 - w_1)}{\partial c} = 0.$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue. Multiplions respectivement ces égalités par $\frac{\partial a}{\partial x}$, $\frac{\partial b}{\partial x}$, $\frac{\partial c}{\partial x}$ et ajoutons-les membre à membre; nous trouvons l'égalité

$$\alpha \frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial x} + \beta \frac{\partial(v_2 - v_1)}{\partial x} + \gamma \frac{\partial(w_2 - w_1)}{\partial x} = 0$$

qui, si l'on se reporte aux égalités (211), devient la première des égalités

$$(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0)\alpha = 0,$$

$$(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0)\beta = 0,$$

$$(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0)\gamma = 0.$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue. Ces égalités montrent que l'on a, en tout point de la surface S,

$$\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0 = 0. \tag{220}$$

L'égalité (266), vérifiée en tout point de la surface s, exprime donc que *la surface* S *est une onde* TRANSVERSALE.

Moyennant l'égalité (266), l'égalité (264) devient

$$\mathfrak{P} = 0. \tag{267}$$

L'onde considérée est d'ordre supérieur au premier par rapport à la pression Π.

$\rho\mathbb{O}$, qui est la densité du fluide à l'instant t_0, ne peut être nul ; les égalités (263) et (266) donnent donc

$$n = 0. \tag{268}$$

La surface s est immobile dans l'espace des a, b, c; donc, dans son mouvement, la surface S *sépare toujours l'une de l'autre les deux mêmes masses fluides.*

D'ailleurs, en vertu de l'égalité (250) et des égalités (254), l'égalité (268) donne

$$\mathfrak{N} - \alpha u + \beta v + \gamma w = 0. \tag{222}$$

On voit sans peine, par les égalités (261), (263) et (264), que chacune des égalités (265), (266), (267) et (268) entraîne les trois autres; *chacun des quatre caractères que nous venons d'énumérer entraîne les trois autres.*

On retrouve ainsi tout ce que nous avons démontré, au § 2, au sujet des ondes transversales.

Second cas. — *L'onde est effectivement du premier ordre par rapport à la densité* ρ.

On n'a pas

$$\mathfrak{R} = 0. \tag{265}$$

Dès lors, on ne peut avoir l'égalité (267), en sorte que *l'onde est effectivement du premier ordre par rapport à la pression* Π.

On ne peut avoir non plus l'égalité (268), et, comme $\rho\mathbb{O}$ est essentiellement positif, les égalités (262) donnent

$$\frac{f}{L} = \frac{g}{n} = \frac{h}{N}. \tag{269}$$

Interprétons ces relations.

Multiplions les trois numérateurs par

$$\lambda \frac{\partial a}{\partial x} + \mu \frac{\partial b}{\partial x} + \nu \frac{\partial c}{\partial x}$$

et tenons compte des égalités (244); les relations (269) deviendront

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\alpha}\left(\lambda f\frac{\partial a}{\partial x}+\mu f\frac{\partial b}{\partial x}+\nu f\frac{\partial c}{\partial x}\right)\\ =&\frac{1}{\beta}\left(\lambda g\frac{\partial a}{\partial x}+\mu g\frac{\partial b}{\partial x}+\nu g\frac{\partial c}{\partial x}\right)\\ =&\frac{1}{\gamma}\left(\lambda h\frac{\partial a}{\partial x}+\mu h\frac{\partial b}{\partial x}+\nu h\frac{\partial c}{\partial x}\right).\end{aligned}$$

En vertu des égalités (258) et (254), ces égalités donnent

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial(u_2-u_1)}{\partial x}=\frac{1}{\beta}\frac{\partial(v_2-v_1)}{\partial x}=\frac{1}{\gamma}\frac{\partial(w_2-w_1)}{\partial x}.$$

Celles-ci, en vertu des égalités (211), donnent la première ligne du groupe suivant

$$\begin{aligned}\frac{\alpha l_0}{\alpha}&=\frac{\alpha m_0}{\beta}=\frac{\alpha n_0}{\gamma},\\ \frac{\beta l_0}{\alpha}&=\frac{\beta m_0}{\beta}=\frac{\beta n_0}{\gamma},\\ \frac{\gamma l_0}{\alpha}&=\frac{\gamma m_0}{\beta}=\frac{\gamma n_0}{\gamma}.\end{aligned}$$

Les deux autres lignes s'obtiennent d'une manière analogue. Ce groupe d'égalités équivaut aux égalités

(223) $$\frac{l_0}{\alpha}=\frac{m_0}{\beta}=\frac{n_0}{\gamma}.$$

Les égalités (269), vérifiées en tout point de la surface s, expriment donc que *la surface* S *est une onde* LONGITUDINALE.

Les égalités (261) et (264) donnent

(270) $$n^2=\frac{L^2+M^2+N^2}{\omega^2}\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{R}}.$$

Transformons cette égalité.

On a

$$\frac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial x}=\frac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}+\frac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x}$$

ou bien, en vertu des égalités (213), (239), (245) et (260), la première des éga-

lités

$$\alpha P_0 = \frac{L\mathfrak{P}}{\omega}, \qquad \beta P_0 = \frac{M\mathfrak{P}}{\omega}, \qquad \gamma P_0 = \frac{N\mathfrak{P}}{\omega}.$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

On en tire, en vertu des égalités (244),

$$P_0 = \frac{\mathfrak{P}}{\omega}\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}. \tag{271}$$

Une démonstration semblable donne

$$R_0 = \frac{\mathfrak{R}}{\omega}\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}, \tag{272}$$

le radical ayant le même signe que dans l'égalité (271).

Des égalités (271) et (272) on tire

$$\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{R}} = \frac{P_0}{R_0}. \tag{273}$$

Les égalités (250), (254), (270) et (273) donnent alors l'égalité

$$(\mathcal{M} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{P_0}{R_0}. \tag{224}$$

Nous avons ainsi retrouvé, par la méthode de Lagrange, tous les résultats qui avaient été obtenus, au § 2, par la méthode d'Euler.

CONCLUSION DE LA SECONDE PARTIE.

En terminant la première Partie de ces recherches, nous avons insisté sur le caractère extrêmement limité et particulier des cas où le mouvement des fluides donne prise aux méthodes ordinaires de l'Hydrodynamique.

On pouvait penser que ces restrictions, qui pèsent sur la plupart des théorèmes dits *généraux* de l'Hydrodynamique, viendraient également borner l'étude de la propagation des ondes; en fait, Hugoniot et M. Hadamard [1] n'ont abordé cette étude qu'en supposant l'existence de la fonction A définie en la première Partie, Chapitre III, § 2; en outre, ils ont supposé que les actions étaient newtoniennes et que le fluide n'était pas visqueux.

---

[1] *Cf.* P. APPELL, *Traité de Mécanique*, t. III, p. 337.

Ces restrictions, heureusement, n'influent pas sur le problème de la propagation des ondes persistantes; ce problème peut être traité avec une généralité qui n'a d'autre limite que la généralité même des équations fondamentales de l'Hydrodynamique; on peut dire que *la solution complète que nous avons donnée de ce problème constitue* LE SEUL THÉORÈME VRAIMENT GÉNÉRAL *que l'on ait obtenu en Hydrodynamique.* En particulier, nous avons obtenu un théorème qui est exact pour tous les fluides possibles, visqueux ou non visqueux, conducteurs ou non conducteurs; seuls, les fluides qui sont à la fois visqueux, incompressibles et bons conducteurs de la chaleur en sont exclus; ce théorème est le suivant :

En tout fluide, on peut observer des ondes, d'ordre quelconque, qui séparent sans cesse les deux mêmes masses fluides et, partant, ne se propagent pas.

Parmi les phénomènes qui manifestent nettement de semblables ondes, on peut citer, outre les cas anciennement connus des tourbillons et des jets, la propagation de la chaleur par convection au sein d'une masse liquide, si bien étudiée, au point de vue expérimental, par M. Bénard (1); les curieuses *cellules* dont ce physicien a observé la formation trouvent leur explication immédiate dans le théorème précédent.

(1) H. BÉNARD, *Journal de Physique*, 3e série, t. IX, 1900, p. 513; t. X, 1901, p. 254.

TROISIÈME PARTIE.

SUR LES QUASI-ONDES (¹).

§ 1. — DÉFINITION DES QUASI-ONDES. FORMULES ANALOGUES AUX FORMULES D'HUGONIOT.

Au sein d'un fluide non visqueux, on peut observer deux sortes d'ondes qui soient du premier ordre (²) par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse. Les unes sont des *ondes transversales* qui ne se propagent pas; les autres sont des *ondes longitudinales;* ce sont ces dernières qui vont nous occuper.

Pour ne pas introduire dans nos raisonnements de complications inutiles, nous supposerons que le fluide est soumis seulement à des actions newtoniennes; nous aurons alors deux cas à distinguer :

1° *Le fluide est doué de conductibilité :*

$$k > 0.$$

Les ondes longitudinales se propagent alors avec une vitesse donnée par la *loi de Newton* [*Recherches sur l'Hydrodynamique,* IIe Partie, égalité (228 *bis*)]

$$(\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{1}{\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T}.$$

2° *Le fluide n'est pas conducteur :*

$$k = 0.$$

(¹) *Sur les quasi-ondes* (*Comptes rendus,* t. CXXXV, p. 761, séance du 10 novembre 1902).

(²) *Recherches sur l'Hydrodynamique;* deuxième Partie : *Sur la propagation des ondes,* Chapitre IV (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 2e série, t. IV, 1902, p. 145).

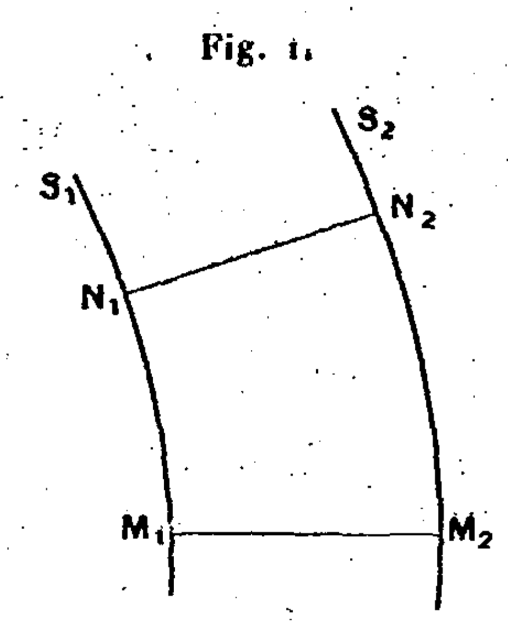
Les ondes longitudinales se propagent alors avec une vitesse donnée par la *loi de Laplace* [*Ibid.*, égalité (233)]

$$(\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{1}{\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T} \frac{C}{c}.$$

L'air est très peu conducteur de la chaleur; cependant sa conductibilité n'est pas rigoureusement nulle. Une onde du premier ordre par rapport aux composantes de la vitesse doit donc, si elle est longitudinale, s'y propager avec une vitesse donnée par la loi de Newton. Or l'expérience montre que la vitesse de propagation d'une onde sonore n'est nullement régie par la formule de Newton, mais bien par la formule de Laplace. Il y a là une apparence de contradiction qu'il nous faut examiner.

Considérons deux surfaces S_1, S_2 (*fig.* 1). Si, par un point M_1 de S_1, nous

Fig. 1.



élevons une normale à cette surface, elle rencontre la surface S_2 en M_2. Nous désignerons par ε la distance M_1M_2. Nous supposerons que la distance ε est une très petite quantité.

Nous supposerons que la région du fluide où sont tracées les surfaces S_1, S_2 n'est traversée par aucune onde; les quantités u, v, w, ρ, Π, T seront donc, dans toute cette région et pendant tout le laps de temps considéré, des fonctions analytiques de x, y, z, t.

Soit f une fonction quelconque de x, y, z; nous désignerons par $(f)_1^2$ l'excès $f(M_2) - f(M_1)$] de sa valeur au point M_2 sur sa valeur au point M_1.

Nous admettrons que les six quantités

$$(u)_1^2, \quad (v)_1^2, \quad (w)_1^2, \quad (\rho)_1^2, \quad (\Pi)_1^2, \quad (T)_1^2$$

sont des quantités très petites, du même ordre que ε, qui varient d'une manière

continue lorsque M_1 décrit la surface S_1, tandis que parmi les quantités

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1^2, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1^2,$$
$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_1^2, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_1^2, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_1^2,$$
$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_1^2, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_1^2, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_1^2$$

il en est au moins une qui a une valeur finie.

Lorsqu'il en sera ainsi, nous dirons que la tranche comprise entre les deux surfaces S_1, S_2 forme une *quasi-onde* du premier ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse. Il est clair qu'au point de vue expérimental, une quasi-onde ne se distingue pas d'une onde véritable; au point de vue algébrique, au contraire, elle en est essentiellement distincte.

Sur la surface S_1, prenons un point quelconque N_1, voisin du point M_1; par ce point, menons une normale à la surface S_1; soit N_2 le point où cette normale rencontre la surface S_2. Visiblement, nous pourrons écrire

$$[u(N_2) - u(N_1)] - [u(M_2) - u(M_1)] = \lambda\varepsilon\overline{M_1N_1},$$

en désignant par λ une quantité finie.

Cette égalité peut encore s'écrire

$$(1) \qquad [u(M_1) - u(N_1)] - [u(M_2) - u(N_2)] = \lambda\varepsilon\overline{M_1N_1}.$$

Si, par le point M_1, on mène une tangente au chemin M_1N_1, et si l'on désigne par l, m, n les cosinus directeurs de cette tangente, on aura

$$(2) \qquad u(N_1) - u(M_1) = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 l + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 m + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1 n\right]\overline{M_1N_1},$$

en désignant par $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1$, $\cdots$ les valeurs des quantités $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\cdots$ au point M_1.

Si, de même, par le point M_2 on mène une tangente au chemin M_2N_2 et si l'on désigne par l', m', n' ses cosinus directeurs, on aura

$$(2\ bis) \qquad u(N_2) - u(M_2) = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2 l' + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_2 m' + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_2 n'\right]\overline{M_2N_2},$$

en désignant par $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2$, $\cdots$ les valeurs des quantités $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\cdots$ au point M_2.

Les quantités $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2, \ldots$ peuvent être finies; au contraire, les différences $l' - l$, $m' - m$, $n' - n$ sont sûrement de l'ordre de ε; il en est de même de la différence $\frac{M_2 N_2}{M_1 N_1} - 1$. Dès lors, les égalités (1), (2) et (2 *bis*) nous permettent d'écrire

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2 l + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1^2 m + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1^2 n = \mu\varepsilon, \tag{3}$$

μ étant une quantité finie.

Cette égalité (3) doit avoir lieu pour tout système de valeurs de l, m, n assujetti aux égalités

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$
$$\alpha l + \beta m + \gamma n = 0.$$

L'une des trois quantités α, β, γ, soit α, est sûrement différente de zéro. Si l'on pose

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \mathfrak{V},$$

l'égalité (3) deviendra

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1^2 - \beta \mathfrak{V}\right] m + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1^2 - \gamma \mathfrak{V}\right] n = \mu\varepsilon.$$

Il nous est loisible de faire prendre à n la valeur zéro; cette égalité nous montrera alors que la différence $\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1^2 - \beta \mathfrak{V}\right]$ a une valeur très petite de l'ordre de ε; nous pouvons, de même, donner à m la valeur zéro; nous voyons que la différence $\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1^2 - \gamma \mathfrak{V}\right]$ a une valeur très petite de l'ordre de ε. En résumé, à chaque point M_1 de la surface S_1, on peut faire correspondre quatre quantités finies $\mathfrak{V}$, a, b, c, telles que l'on ait

$$\left\{\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2 &= \alpha \mathfrak{V} + a\varepsilon, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1^2 &= \beta \mathfrak{V} + b\varepsilon, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1^2 &= \gamma \mathfrak{V} + c\varepsilon. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

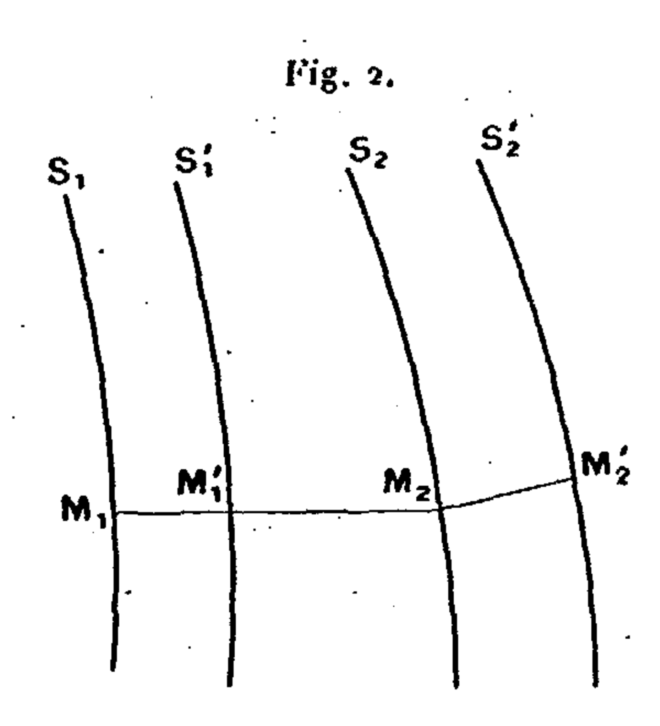
On justifierait de même les égalités

$$\left\{\begin{aligned} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_1^2 &= \alpha \mathfrak{Y} + a'\varepsilon, \qquad \ldots, \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_1^2 &= \alpha \mathfrak{W} + a''\varepsilon, \qquad \ldots. \end{aligned}\right. \tag{4 bis}$$

Ces égalités jouent pour les quasi-ondes le même rôle que le premier lemme d'Hugoniot pour les ondes proprement dites.

Considérons maintenant une quasi-onde *persistante;* limitée, à l'instant t, par les surfaces S_1, S_2, elle est limitée, à l'instant $(t+dt)$, par les surfaces S'_1, S'_2 (*fig.* 2). La normale à la surface S_1, menée par le point M_1, rencontre la sur-

Fig. 2.



face S'_1 en M'_1; la normale à la surface S_2, menée par le point M_2, rencontre la surface S'_2 en M'_2; on a

$$M_1M'_1 = \mathfrak{N}\,dt, \qquad \overline{M_2M'_2} = \mathfrak{N}_2\,dt,$$

$\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}_2$ ayant, pour chaque point M_1 de la surface S_1, des valeurs déterminées; de plus, $(\mathfrak{N}_2 - \mathfrak{N})$ est de l'ordre de ε.

Nous pouvons évidemment écrire

$$[u(M'_2) - u(M'_1)] - [u(M_2) - u(M_1)] = \lambda\varepsilon\,dt,$$

λ étant une quantité finie; ou bien encore

$$(5) \qquad [u(M'_2) - u(M_2)] - [u(M'_1) - u(M_1)] = \lambda\varepsilon\,dt.$$

Or on a

$$(6) \qquad u(M'_1) - u(M_1) = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 \alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 \beta + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1 \gamma\right] \mathfrak{N}\,dt + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_1 dt.$$

Si α_2, β_2, γ_2 sont les cosinus directeurs de la normale $M_2M'_2$, on a de même

$$(6\,bis) \qquad u(M'_2) - u(M_2) = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2 \alpha_2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_2 \beta_2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_2 \gamma_2\right] \mathfrak{N}_2\,dt + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_2 dt.$$

Mais, visiblement, les différences $(\alpha_2 - \alpha)$, $(\beta_2 - \beta)$, $(\gamma_2 - \gamma)$ sont des quantités

très petites de l'ordre de ε. Les égalités (5), (6), (6 *bis*) donnent donc l'égalité

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2\alpha+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1^2\beta+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1^2\gamma\right]\mathfrak{N}+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_1^2=\mu\varepsilon.$$

Comparée aux égalités (4), cette relation devient la première des égalités

$$(7)\qquad\begin{cases}\mathfrak{N}\mathfrak{U}+\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)_1^2=d\,\varepsilon,\\ \mathfrak{N}\mathfrak{V}+\left(\dfrac{\partial v}{\partial t}\right)_1^2=d'\varepsilon,\\ \mathfrak{N}\mathfrak{W}+\left(\dfrac{\partial w}{\partial t}\right)_1^2=d''\varepsilon,\end{cases}$$

d, d', d'' étant trois quantités finies.

Les deux autres s'établissent d'une manière analogue. Ces égalités (7) sont, pour les quasi-ondes, ce que le second lemme d'Hugoniot est pour les ondes.

§ 2. — Des quasi-ondes dans les fluides parfaits.

L'équation de continuité

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+w\frac{\partial\rho}{\partial z}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0$$

est vraie en tout point de l'espace; écrivons-la au point M_2, puis au point M_1, et retranchons membre à membre les deux égalités obtenues; nous trouvons

$$(8)\qquad\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_1^2+u\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)_1^2+v\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)_1^2+w\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)_1^2+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)_1^2=\lambda\varepsilon,$$

λ étant une quantité finie. Mais une démonstration semblable à celle qui a fourni les égalités (4), (4 *bis*) et (7) montre qu'à tout point M_1 de la surface S_1 correspondent cinq quantités finies A, B, C, D, $\mathfrak{R}$ telles que l'on ait

$$(9)\qquad\begin{cases}\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial x}\right)_1^2=\alpha\mathfrak{R}+A\varepsilon,\\ \left(\dfrac{\partial\rho}{\partial y}\right)_1^2=\beta\mathfrak{R}+B\varepsilon,\\ \left(\dfrac{\partial\rho}{\partial z}\right)_1^2=\gamma\mathfrak{R}+C\varepsilon,\\ \left(\dfrac{\partial\rho}{\partial t}\right)_1^2+\mathfrak{N}\mathfrak{R}=D\varepsilon.\end{cases}$$

En vertu des égalités (4), (4 *bis*) et (9), l'égalité (8) devient

$$(10)\qquad (\mathfrak{M} - \alpha u - \beta v - \gamma w)\mathfrak{R} - \rho(\alpha\mathfrak{U} + \beta\mathfrak{V} + \gamma\mathfrak{W}) = E\varepsilon,$$

E étant, en tout point M_1 de la surface S_1, une quantité finie.

Raisonnons de même sur les trois équations hydrodynamiques; écrivons la première

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} - \rho X + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0$$

au point M_2, puis au point M_1, et retranchons membre à membre les deux égalités obtenues; la différence $[X(M_2) - X(M_1)]$ étant supposée très petite de l'ordre de ε, nous trouverons l'égalité

$$(11)\qquad \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)_1^2 + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_1^2 + \rho u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2 + \rho v\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1^2 + \rho w\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1^2 = \lambda\varepsilon,$$

où λ est une quantité finie.

Mais, en tout point M_1 de la surface S_1, il existe cinq quantités finies A', B', C', D', $\mathfrak{P}$ telles que l'on ait les égalités

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial \Pi}{\partial x}\right)_1^2 = \alpha\mathfrak{P} + A'\varepsilon, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \left(\dfrac{\partial \Pi}{\partial t}\right)_1^2 + \mathfrak{M}\mathfrak{P} = D'\varepsilon, \end{array}\right.$$

analogues aux égalités (9). Moyennant les égalités (4) et (12), et en désignant par F une quantité finie, l'égalité (11) devient la première des égalités

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{l} \rho(\mathfrak{M} - \alpha u - \beta v - \gamma w)\mathfrak{U} - \alpha\mathfrak{P} = F\varepsilon, \\ \rho(\mathfrak{M} - \alpha u - \beta v - \gamma w)\mathfrak{V} - \beta\mathfrak{P} = G\varepsilon, \\ \rho(\mathfrak{M} - \alpha u - \beta v - \gamma w)\mathfrak{W} - \gamma\mathfrak{P} = H\varepsilon. \end{array}\right.$$

Les deux autres s'établissent d'une manière analogue.

En chaque point du fluide, nous avons l'équation de compressibilité [*Recherches*, Ire Partie, égalité (75)]

$$\Pi - \rho^2\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} = 0,$$

qui nous permet d'écrire, en particulier,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} - \left(2\rho\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + \rho^2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho^2}\right)\frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho^2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}\frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

Écrivons cette égalité pour le point M_2 et pour le point M_1, et retranchons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons l'égalité

$$(14)\qquad \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_1^2 - \left(2\rho\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + \rho^2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho^2}\right)\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_1^2 - \rho^2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_1^2 = 0.$$

Deux cas sont à distinguer :

1° La quasi-onde est du second ordre par rapport à la température T; $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_1^2$, $\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_1^2$, $\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_1^2$ sont des quantités de l'ordre de ε; alors, en vertu des égalités (9) et (12), l'égalité (14) devient

$$(15)\qquad \mathfrak{P} - \left(2\rho\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + \rho^2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho^2}\right)\mathfrak{R} = J\varepsilon,$$

J étant une quantité finie.

2° La quasi-onde est du premier ordre par rapport à la température T; il existe alors cinq quantités A'', B'', C'', D'', $\mathfrak{T}$, finies en tout point de la surface S_1, telles que l'on ait

$$(16)\qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_1^2 = \alpha\mathfrak{T} + A''\varepsilon, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_1^2 = \beta\mathfrak{T} + B''\varepsilon, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_1^2 = \gamma\mathfrak{T} + C''\varepsilon, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_1^2 + \mathfrak{N}\mathfrak{T} = D''\varepsilon. \end{cases}$$

En vertu de ces égalités (16) et des égalités analogues (9) et (12), l'égalité (14) devient

$$(17)\qquad \mathfrak{P} - \left(2\rho\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + \rho^2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho^2}\right)\mathfrak{R} - \rho^2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}\mathfrak{T} = K\varepsilon,$$

K étant une quantité finie.

Pour connaître celui des deux cas auquel nous avons affaire, nous allons recourir à la considération de la conductibilité.

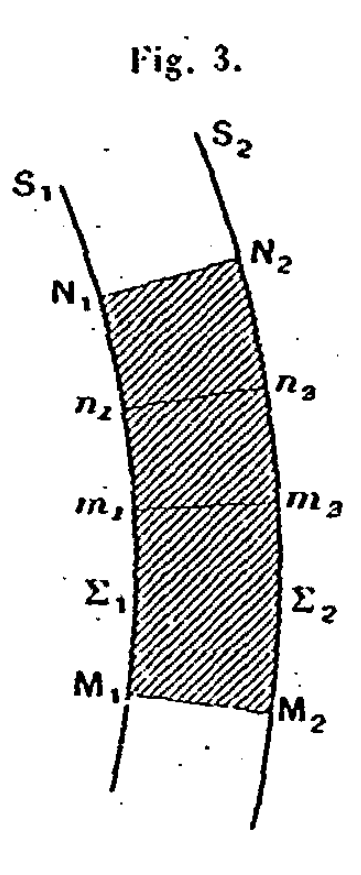
Sur la surface S_1, prenons (*fig.* 3) une aire d'étendue finie M_1N_1 ou Σ_1; par les divers points M_1, N_1, ... du contour de cette aire, menons des normales à la surface S_1 et prolongeons-les jusqu'à la surface S_2; elles y dessinent le contour M_2N_2 d'une aire finie Σ_2. Demandons à la théorie de la conductibilité l'expression de la quantité de chaleur dQ dégagée, dans le temps dt, par le volume $M_1N_1M_2N_2$. Si dS est un élément de la surface S qui limite ce volume,

si ν est la normale à cet élément vers l'intérieur de ce volume, nous avons

$$dQ = dt \int k \frac{\partial T}{\partial \nu} dS.$$

La surface S se compose de trois parties : les deux aires Σ_1, Σ_2 et la surface réglée σ qui s'appuie sur leurs contours. Soit $m_1 n_1 = d\Sigma_1$ un élément de l'aire Σ_1 ; des normales à S_1, issues des divers points $m_1, n_1, \ldots$ du contour de cet élément,

Fig. 3.



découpent en l'aire Σ_2 un élément $m_2 n_2 = d\Sigma_2$, qui correspond à l'élément $d\Sigma_1$ α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale $m_1 m_2$ à la surface S_1 ; la normale menée en m_2 à la surface S_2, dirigée dans le même sens que la précédente, a pour cosinus directeurs α_2, β_2, γ_2. Nous aurons alors

$$\begin{aligned} dQ = dt \int_\sigma k \frac{\partial T}{\partial \nu} d\sigma + dt \int_{\Sigma_1} k(m_1) \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_1 \alpha + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_1 \beta + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_1 \gamma \right] d\Sigma_1 \\ - dt \int_{\Sigma_1} k(m_2) \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_2 \alpha_2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_2 \beta_2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_2 \gamma_2 \right] d\Sigma_2, \end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(18) \quad \begin{aligned} dQ = &- dt \int_{\Sigma_1} k(m_1) \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_1^2 \alpha + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_1^2 \beta + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_1^2 \gamma \right] d\Sigma_1 \\ &- dt \int_{\Sigma_1} \left\{ \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_2 \left[\alpha_2 k(m_2) \frac{d\Sigma_2}{d\Sigma_1} - \alpha k(m_1) \right] \right. \\ &+ \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_2 \left[\beta_2 k(m_2) \frac{d\Sigma_2}{d\Sigma_1} - \beta k(m_1) \right] \\ &+ \left. \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_2 \left[\gamma_2 k(m_2) \frac{d\Sigma_2}{d\Sigma_1} - \gamma k(m_1) \right] \right\} d\Sigma_1 + dt \int_\sigma k \frac{\partial T}{\partial \nu} d\sigma. \end{aligned}$$

L'aire σ est de l'ordre de ε; si le coefficient de conductibilité est très petit de l'ordre de χ, l'intégrale $\int_\sigma k \frac{\partial T}{\partial y} d\sigma$ sera de l'ordre de $\varepsilon\chi$.

Les différences

$$\alpha_2 - \alpha, \quad \beta_2 - \beta, \quad \gamma_2 - \gamma, \quad \frac{d\Sigma_2}{d\Sigma_1} - 1$$

sont assurément de l'ordre de ε; on a

$$k(m_2) - k(m_1) = k(\rho_2, T_2) - k(\rho_1, T_1),$$

et, comme les différences $(\rho_2 - \rho_1)$, $(T_2 - T_1)$ sont de l'ordre de ε, la différence $k(m_2) - k(m_1)$ sera de l'ordre de $\varepsilon\chi$. Il en sera de même des différences

$$\alpha_2 k(m_2) \frac{d\Sigma_2}{d\Sigma_1} - \alpha k(m_1),$$

$$\beta_2 k(m_2) \frac{d\Sigma_2}{d\Sigma_1} - \beta k(m_1),$$

$$\gamma_2 k(m_2) \frac{d\Sigma_2}{d\Sigma_1} - \gamma k(m_1),$$

et de la seconde intégrale en l'égalité (18). Cette égalité peut s'écrire

$$dQ = -dt \int_{\Sigma_1} k(m_1) \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_1^2 \alpha + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_1^2 \beta + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_1^2 \gamma \right] d\Sigma_1 + \lambda\varepsilon\chi\, dt,$$

λ étant une quantité finie. Mais les quantités

$$k(m_1)\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_1^2 \alpha, \quad k(m_1)\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_1^2 \beta, \quad k(m_1)\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_1^2 \gamma$$

sont d'ordre $\varepsilon\chi$ si la quasi-onde est du premier ordre en T, et d'ordre $\varepsilon^2\chi$ si la quasi-onde est du deuxième ordre en T; on peut donc écrire, en toute circonstance,

$$(19) \qquad dQ = \lambda\varepsilon\chi\, dt.$$

λ étant une quantité finie.

La quantité de chaleur dQ peut encore s'exprimer d'une autre manière; on a [*Recherches*, Ire Partie, égalité (90)]

$$E\, dQ = dt \int \left[T\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} u + \frac{\partial T}{\partial y} v + \frac{\partial T}{\partial z} w + \frac{\partial T}{\partial t} \right) - T\rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] d\varpi,$$

l'intégrale s'étendant au volume $M_1 N_1 N_2 M_2$. Ce volume est de l'ordre de ε; on

voit alors que la quantité sous le signe $\int$ doit, selon l'égalité (19), être de l'ordre de χ :

$$T\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}u + \frac{\partial T}{\partial y}v + \frac{\partial T}{\partial z}w + \frac{\partial T}{\partial t}\right) - T\rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \mu\chi,$$

μ étant une quantité finie. Si nous écrivons cette égalité au point m_1, puis au point m_2, et si nous retranchons membre à membre les résultats obtenus, nous trouverons sans peine l'égalité

$$(20)\quad \begin{aligned} &T\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_1^2 u + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_1^2 v + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_1^2 w + \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_1^2\right] \\ &\quad - T\rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_1^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_1^2\right] = \nu\chi + \varpi\varepsilon, \end{aligned}$$

ν et ϖ étant deux quantités finies.

Si la quasi-onde considérée est du premier ordre par rapport à T, les égalités (4), (4 *bis*) et (16) transformeront l'égalité (20) en

$$(21)\quad T\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2}(\mathfrak{T} - \alpha u - \beta v - \gamma w)\mathfrak{E} + T\rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}(\alpha \mathfrak{U} + \beta \mathfrak{V} + \gamma \mathfrak{W}) = \nu\chi + \theta\varepsilon,$$

θ étant une quantité finie.

En chaque point du fluide, on peut écrire la relation supplémentaire [*Recherches*, Ire Partie, égalité (94)]

$$(22)\quad \begin{aligned} &k\,\Delta T + \frac{\partial k}{\partial T}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2\right] \\ &\quad + \frac{\partial k}{\partial \rho}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) \\ &\quad + \frac{T}{E}\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}u + \frac{\partial T}{\partial y}v + \frac{\partial T}{\partial z}w + \frac{\partial T}{\partial t}\right) \\ &\quad - \frac{T}{E}\rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0. \end{aligned}$$

Le premier membre se compose de cinq termes; en toutes circonstances, le quatrième et le cinquième sont au plus finis, le deuxième et le troisième sont de l'ordre de χ.

Si la quasi-onde est du premier ordre par rapport à la température T, les dérivées partielles du second ordre de T en x, y, z, seront, en général, d'ordre $\frac{1}{\varepsilon}$ à l'intérieur de cette quasi-onde; il en sera de même de ΔT; $k\,\Delta T$ sera donc de

l'ordre de grandeur $\frac{\chi}{\varepsilon}$. Si, au contraire, la quasi-onde est, en T, d'ordre supérieur au premier, ΔT est fini et $k\,\Delta T$ est de l'ordre de χ.

L'égalité précédente nous enseigne donc que, *pour qu'une quasi-onde, du premier ordre en u, v, w, ρ, Π, puisse être du premier ordre en T, il faut que* $\frac{\chi}{\varepsilon}$ *soit fini, ou que son épaisseur soit du même ordre de grandeur que le coefficient de conductibilité; si, au contraire, son épaisseur ε est très petite par rapport au coefficient de conductibilité, la quasi-onde est d'ordre supérieur au premier par rapport à T.*

Dans ce dernier cas, on a

$$\mathfrak{C} = 0. \tag{23}$$

Dans le premier, l'égalité (21) peut s'écrire

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2}(\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)\mathfrak{C} + \rho\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\,\partial T}(\alpha \mathfrak{U} + \beta \mathfrak{V} + \gamma \mathfrak{W}) = \eta\varepsilon, \tag{24}$$

η étant une quantité finie.

Les égalités (10), (13), (15), (17), (24) ne diffèrent que par des termes de l'ordre de ε des équations qui nous ont permis de traiter la propagation des ondes proprement dites dans les fluides parfaits (*Recherches*, 2e Partie, Chap. IV). Nous parvenons donc sans peine aux résultats suivants :

Au sein d'un fluide parfait très peu conducteur, on peut observer :

1° *Des quasi-ondes sensiblement transversales. Elles ne se propagent pas, en sorte que l'on a sensiblement*

$$\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w = 0.$$

2° *Des quasi-ondes sensiblement longitudinales. Celles-ci sont de deux sortes :*

A. *Les unes ont une épaisseur très petite par rapport au coefficient de conductibilité du fluide; leur vitesse de propagation est donnée sensiblement par la formule de Newton*

$$(\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{1}{\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T}.$$

B. *Les autres ont une épaisseur du même ordre de grandeur que le coefficient de conductibilité du fluide; leur vitesse de propagation est sensible-*

ment donnée par la formule de Laplace

$$(\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{1}{\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T} \frac{C}{c}.$$

Les ondes proprement dites, dont l'épaisseur est rigoureusement nulle, doivent être regardées comme la forme limite des premières ondes.

Nous voyons maintenant que les observations faites sur la propagation du son dans l'air et les autres gaz concordent avec les résultats de la théorie, pourvu que l'on admette la proposition suivante :

En aucun cas on n'observe, au sein de l'air ou d'un gaz peu conducteur, ni la propagation d'une onde proprement dite, ni la propagation d'une quasi-onde dont l'épaisseur soit très petite par rapport au coefficient de conductibilité.

§ 3. — Des quasi-ondes au sein des fluides visqueux.

Il reste à rechercher les raisons que l'on peut avoir d'admettre l'exactitude d'une telle proposition. Ces raisons vont être tirées de la remarque suivante : *Ni l'air, ni les autres gaz ne sont des fluides parfaits; leurs coefficients de viscosité ne sont pas rigoureusement nuls; ils sont seulement très petits.*

Or, ce que nous savons déjà (*Recherches*, IIe Partie, Chap. III) nous enseigne qu'*aucune onde proprement dite ne peut se propager dans un fluide visqueux, quelque petits que soient les coefficients de viscosité.*

Mais il y a plus. Nous allons voir que l'existence de la viscosité, si faible soit-elle, impose une limite inférieure à l'épaisseur d'une quasi-onde capable de se propager.

Considérons une quasi-onde $S_1 S_2$ du premier ordre par rapport à u, v, w, ρ, Π. Par cet énoncé, nous excluons les quasi-ondes qui seraient du premier ordre par rapport à certains de ces éléments et du second ordre par rapport à d'autres; comme les ondes proprement dites jouissant de telles propriétés, de semblables quasi-ondes sont possibles, mais elles ne se propagent pas.

Au sein de la quasi-onde $S_1 S_2$, découpons le volume $M_1 N_1 N_2 M_2$ représenté par la figure 3. Donnons un déplacement virtuel à la masse fluide que renferme ce volume. Nous supposerons que lorsqu'on traverse ce volume suivant une normale $m_1 m_2$ à la surface S_1, les composantes δx, δy, δz varient de telle sorte que leurs dérivées partielles $\frac{\partial \delta x}{\partial x}$, ..., soient du même ordre de grandeur que δx, ...;

dès lors, du point m_1 au point m_2, δx subit une variation $(\delta x_2 - \delta x_1)$ qui est du même ordre de grandeur que $\varepsilon\,\delta x$.

Pour ce déplacement virtuel, nous pourrons écrire

$$(25)\qquad d\mathfrak{T}_e + d\mathfrak{T}_j + d\mathfrak{T}_v - \delta_T\mathfrak{F} + \int_S [P_x\,\delta x + P_y\,\delta y + P_z\,\delta z] = 0.$$

Dans cette égalité,

$d\mathfrak{T}_e$ représente le travail virtuel des forces extérieures appliquées aux divers éléments de masse du fluide déplacé,

$d\mathfrak{T}_j$ le travail des forces d'inertie appliquées aux mêmes éléments,

$d\mathfrak{T}_v$ le travail des actions de viscosité appliquées aux mêmes éléments,

$\mathfrak{F}$ le potentiel interne de la masse fluide,

S la surface qui la limite,

enfin P_x, P_y, P_z ont les valeurs suivantes [*Recherches sur l'Hydrodynamique*, Ire Partie, égalités (77)]

$$(26)\quad \begin{cases} P_x = (\Pi + \nu_x)\cos(n_i, x) + \tau_z\cos(n_i, y) + \tau_y\cos(n_i, z), \\ P_y = \tau_z\cos(n_i, x) + (\Pi + \nu_y)\cos(n_i, y) + \tau_x\cos(n_i, z), \\ P_z = \tau_y\cos(n_i, x) + \tau_x\cos(n_i, y) + (\Pi + \nu_z)\cos(n_i, z). \end{cases}$$

$d\mathfrak{T}_e$, $d\mathfrak{T}_j$, $\delta_T\mathfrak{F}$ sont visiblement des quantités infiniment petites du même ordre de grandeur que $\varepsilon\,\delta x$.

Il est facile de voir qu'il en est de même de $d\mathfrak{T}_v$. Cette quantité, en effet, a pour valeur [*Recherches*, 1re Partie, égalité (46)]

$$d\mathfrak{T}_v = \int\Big[\nu_x\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \nu_y\frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \nu_z\frac{\partial\,\delta z}{\partial z} + \tau_x\left(\frac{\partial\,\delta y}{\partial z} + \frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right) + \tau_y\left(\frac{\partial\,\delta z}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta x}{\partial z}\right) + \tau_z\left(\frac{\partial\,\delta x}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta y}{\partial x}\right)\Big]\,d\varpi,$$

tandis que ν_x, ν_y, ν_z, τ_x, τ_y, τ_z sont donnés par les égalités [*Recherches*, Ire Partie, égalités (51)]

$$(27)\quad \begin{cases} \nu_x = -\lambda(\rho, T)\theta - 2\mu(\rho, T)\dfrac{\partial u}{\partial x}, \qquad \tau_x = -\mu(\rho, T)\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right), \\ \dots\dots\dots\dots, \qquad \dots\dots\dots\dots, \\ \theta = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}. \end{cases}$$

Les quantités ν_i, τ_i sont visiblement finies; $d\mathfrak{T}_v$ est donc une quantité infiniment petite de l'ordre de $\varepsilon\,\delta x$, même si les coefficients de viscosité λ, μ ne sont pas très petits.

La surface S se décompose en trois parties que nous avons désignées par σ, Σ_1, Σ_2. Il est clair que, dans l'égalité (25), la partie de l'intégrale $\int_S$ qui se rapporte à la surface σ est infiniment petite de l'ordre de $\varepsilon\,\delta x$.

Si donc nous désignons par K une quantité du même ordre de grandeur que les déplacements virtuels δx, δy, δz, l'égalité (25) pourra s'écrire

$$(28)\qquad \int_{\Sigma_1}[\mathrm{P}_x(m_1)\,\delta x_1+\mathrm{P}_y(m_1)\,\delta y_1+\mathrm{P}_z(m_1)\,\delta z_1]\,d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_2}[\mathrm{P}_x(m_2)\,\delta x_2+\mathrm{P}_y(m_2)\,\delta y_2+\mathrm{P}_z(m_2)\,\delta z_2]\,d\Sigma_2 = \mathrm{K}\varepsilon.$$

Considérons la somme

$$\mathrm{P}_x(m_1)\,\delta x_1\,d\Sigma_1+\mathrm{P}_x(m_2)\,\delta x_2\,d\Sigma_2.$$

On peut l'écrire

$$(29)\qquad [\mathrm{P}_x(m_2)+\mathrm{P}_x(m_1)]\,\delta x_1\,d\Sigma_1+\mathrm{P}_x(m_2)[\delta x_2\,d\Sigma_2-\delta x_1\,d\Sigma_1].$$

La quantité $\mathrm{P}_x(m_2)$ est finie; la différence $(\delta x_2\,d\Sigma_2-\delta x_1\,d\Sigma_1)$ est de l'ordre de grandeur de $\varepsilon\,\delta x_1\,d\Sigma_1$; il en est donc de même du second terme de l'expression (29).

Considérons le premier terme.

En m_1,

$$\cos(n_i, x)=\alpha,\qquad \cos(n_i, y)=\beta,\qquad \cos(n_i, z)=\gamma,$$

En m_2,

$$\cos(n_i, x)=-\alpha_2,\qquad \cos(n_i, y)=-\beta_2,\qquad \cos(n_i, z)=-\gamma_2.$$

Nous pourrons donc écrire en vertu des égalités (26),

$$\mathrm{P}_x(m_2)+\mathrm{P}_x(m_1)=(\Pi_1-\Pi_2+\nu_{x1}-\nu_{x2})\alpha+(\tau_{z1}-\tau_{z2})\beta+(\tau_{y1}-\tau_{y2})\gamma - (\Pi_2+\nu_{x2})(\alpha_2-\alpha)-\tau_{z2}(\beta_2-\beta)-\tau_{y2}(\gamma_2-\gamma).$$

Les quantités $(\Pi_2-\Pi_1)$, $(\alpha_2-\alpha)$, $(\beta_2-\beta)$, $(\gamma_2-\gamma)$ étant des quantités très petites de l'ordre de ε, nous pourrons réduire $\mathrm{P}_x(m_2)+\mathrm{P}_x(m_1)$ à

$$(\nu_{x1}-\nu_{x2})\alpha+(\tau_{z1}-\tau_{z2})\beta+(\tau_{y1}-\tau_{y2})\gamma,$$

augmenté d'une quantité très petite de l'ordre de ε.

Par ces raisonnements et par des raisonnements analogues, on voit que l'éga-

lité (28) peut se mettre sous la forme

$$\int_{\Sigma_1} \Big\{ [(\nu_{x2}-\nu_{x1})\alpha + (\tau_{z2}-\tau_{z1})\beta + (\tau_{y2}-\tau_{y1})\gamma]\,\delta x_1$$
$$+ [(\tau_{z2}-\tau_{z1})\alpha + (\nu_{y2}-\nu_{y1})\beta + (\tau_{x2}-\tau_{x1})\gamma]\,\delta y_1$$
$$+ [(\tau_{y2}-\tau_{y1})\alpha + (\tau_{x2}-\tau_{x1})\beta + (\nu_{z2}-\nu_{z1})\gamma]\,\delta z_1 \Big\} d\Sigma_1 = L\varepsilon,$$

L étant une quantité du même ordre de grandeur que δx, δy, δz.

Cette égalité devant avoir lieu quels que soient δx_1, δy_1, δz_1, on doit avoir, en tout point de la surface Σ_1,

$$(30)\qquad \begin{cases} (\nu_{x2}-\nu_{x1})\alpha + (\tau_{z2}-\tau_{z1})\beta + (\tau_{y2}-\tau_{y1})\gamma = G\,\varepsilon, \\ (\tau_{z2}-\tau_{z1})\alpha + (\nu_{y2}-\nu_{y1})\beta + (\tau_{x2}-\tau_{x1})\gamma = G'\varepsilon, \\ (\tau_{y2}-\tau_{y1})\alpha + (\tau_{x2}-\tau_{x1})\beta + (\nu_{z2}-\nu_{z1})\gamma = G''\varepsilon, \end{cases}$$

G, G′, G″ étant trois quantités finies.

Selon la première égalité (27), nous pouvons écrire

$$\nu_{x2}-\nu_{x1} = -\lambda(\rho_1, T_1)(\theta)_1^2 - 2\mu(\rho_1, T_1)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2$$
$$- \theta_2[\lambda(\rho_2, T_2) - \lambda(\rho_1, T_1)] - 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2[\mu(\rho_2, T_2) - \mu(\rho_1, T_1)].$$

Lors même que les coefficients de viscosité λ, μ ne seraient pas très petits, les différences

$$\lambda(\rho_2, T_2) - \lambda(\rho_1, T_1), \quad \mu(\rho_2, T_2) - \mu(\rho_1, T_1)$$

sont des quantités très petites de l'ordre de ε; il en est donc de même des deux derniers termes de l'égalité précédente.

Par ce raisonnement et par des raisonnements analogues, nous pourrons, au lieu des égalités (30), écrire les égalités

$$(31)\qquad \begin{cases} \left\{\lambda\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_1^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_1^2\right] + 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2\right\}\alpha \\ \quad + \mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_1^2\right]\beta + \mu\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_1^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1^2\right]\gamma = H\varepsilon, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

λ, μ étant mis respectivement pour $\lambda(\rho_1, T_1)$, $\mu(\rho_1, T_1)$ et H, H′, H″ étant trois quantités finies.

Moyennant les égalités (4) et (4 *bis*), ces égalités (31) deviennent

$$(32)\quad \begin{cases} (\lambda+\mu)(\alpha\mathfrak{U}+\beta\mathfrak{V}+\gamma\mathfrak{W})\alpha+\mu\mathfrak{U}=h\,\varepsilon, \\ (\lambda+\mu)(\alpha\mathfrak{U}+\beta\mathfrak{V}+\gamma\mathfrak{W})\beta+\mu\mathfrak{V}=h'\varepsilon, \\ (\lambda+\mu)(\alpha\mathfrak{U}+\beta\mathfrak{V}+\gamma\mathfrak{W})\gamma+\mu\mathfrak{W}=h''\varepsilon, \end{cases}$$

h, h', h'' étant trois quantités finies.

Si nous multiplions respectivement ces égalités par α, β, γ et si nous les ajoutons membre à membre, nous trouvons l'égalité

$$(\lambda+2\mu)(\alpha\mathfrak{U}+\beta\mathfrak{V}+\gamma\mathfrak{W})=(\alpha h+\beta h'+\gamma h'')\varepsilon$$

qui permet de leur donner la forme suivante :

$$(33)\quad \begin{cases} \mathfrak{U}=\left[h-(\alpha h+\beta h'+\gamma h'')\alpha\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\right]\dfrac{\varepsilon}{\mu}, \\ \mathfrak{V}=\left[h'-(\alpha h+\beta h'+\gamma h'')\beta\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\right]\dfrac{\varepsilon}{\mu}, \\ \mathfrak{W}=\left[h''-(\alpha h+\beta h'+\gamma h'')\gamma\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\right]\dfrac{\varepsilon}{\mu}. \end{cases}$$

Pour que la quasi-onde considérée soit réellement du premier ordre en u, v, w, il faut que $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ soient des quantités finies, et non pas des quantités très petites; il ne faut donc pas que $\frac{\varepsilon}{\mu}$ soit une quantité très petite. Nous pouvons, dès lors, énoncer les propositions suivantes :

Un fluide dont le coefficient de viscosité μ n'est pas très petit ne permet la propagation d'aucune quasi-onde très mince.

Un fluide dont le coefficient de viscosité μ est très petit ne permet la propagation d'une quasi-onde que si l'épaisseur ε de cette quasi-onde est au moins de l'ordre de μ; si l'épaisseur ε de la quasi-onde était très petite par rapport à μ, cette quasi-onde ne pourrait se propager.

Cette proposition nous donne déjà la raison de celle qui a été admise à la fin du paragraphe précédent.

Mais une question se pose maintenant : L'existence d'une faible viscosité ne modifie-t-elle pas d'une manière notable les lois de la propagation d'une quasi-onde établie au § 1? C'est cette question que nous allons examiner.

Les termes de viscosité n'intervenant ni dans l'équation de continuité, ni dans l'équation de compressibilité, rien n'est changé à l'établissement des équations (10) et (17); il nous faut au contraire reprendre les raisonnements qui ont

donné les équations (13), (21), (23) et (24).

En tout point du milieu, nous devons écrire les égalités

$$(34)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \Pi}{\partial x} - \rho X + \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \quad -(\lambda+\mu)\dfrac{\partial \theta}{\partial x} - \mu\Delta u - \theta\left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial \rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + \dfrac{\partial \lambda}{\partial T}\dfrac{\partial T}{\partial x}\right) \\ \quad -\left[2\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial T}{\partial x} + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\dfrac{\partial \rho}{\partial y} + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\dfrac{\partial \rho}{\partial z}\right]\dfrac{\partial \mu}{\partial \rho} \\ \quad -\left[2\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial T}{\partial x} + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\dfrac{\partial T}{\partial y} + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\dfrac{\partial T}{\partial z}\right]\dfrac{\partial \mu}{\partial T} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Au sein de la quasi-onde, les dérivées du second ordre $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots$ sont très grandes, comme $\dfrac{1}{\varepsilon}$; il en est donc de même, en général, de $\dfrac{\partial \theta}{\partial x}, \dfrac{\partial \theta}{\partial y}, \dfrac{\partial \theta}{\partial z}, \Delta u$. Nous supposerons que μ soit une quantité très petite de l'ordre de ε, sans quoi, nous l'avons vu, aucune quasi-onde ne pourrait se propager; dès lors, aux premiers membres des équations (34), tous les termes sont assurément finis, sauf peut-être les termes

$$\lambda\frac{\partial \theta}{\partial x},\quad \lambda\frac{\partial \theta}{\partial y},\quad \lambda\frac{\partial \theta}{\partial z}.$$

Les équations (34) ne peuvent avoir lieu que si ces termes sont aussi finis.

Supposons d'abord λ fini; il faudra que $\dfrac{\partial \theta}{\partial x}, \dfrac{\partial \theta}{\partial y}, \dfrac{\partial \theta}{\partial z}$ soient, dans toute l'étendue de la quasi-onde, non pas des quantités très grandes de l'ordre de $\dfrac{1}{\varepsilon}$, mais simplement des quantités finies. Dès lors, $\theta(m_2) - \theta(m_1)$, au lieu d'être une quantité finie, sera une quantité très petite de l'ordre de ε.

Mais les égalités (4) et (4 *bis*) donnent

$$\theta(m_2) - \theta(m_1) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_1^2 = (\alpha\mathfrak{U} + \beta\mathfrak{V} + \gamma\mathfrak{W}) + (a + b' + c'')\varepsilon.$$

On voit donc que si λ est fini, $(\alpha\mathfrak{U} + \beta\mathfrak{V} + \gamma\mathfrak{W})$ devra être une quantité très petite de l'ordre de ε; toute quasi-onde sera sensiblement transversale. Laissons de côté cette onde transversale, dont l'existence était prévue et dont la vitesse de propagation est nulle.

Nous ne pourrons observer une quasi-onde autre que celle-là, à moins que λ ne soit une quantité très petite du même ordre que ε, et partant que μ.

Tous les termes qui figurent aux premiers membres des égalités (34) seront

maintenant des termes finis. Nous pourrons donc écrire ces équations au point m_2, puis au point m_1, et retrancher membre à membre les équations correspondantes; mais, auparavant, nous devrons prendre une précaution qui, jusqu'ici, était inutile.

Les dérivées partielles telles que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, ... sont, à l'intérieur de la quasi-onde, très grandes de l'ordre $\frac{1}{\varepsilon}$; en dehors de la quasi-onde, elles redeviennent finies. On aura soin de tracer les surfaces S_1, S_2 dans les parties de l'espace où ces dérivées du second ordre ont des valeurs finies.

Moyennant cette précaution, l'opération indiquée redonnera les équations (11) et (13).

Venons maintenant à l'équation (20) et au raisonnement qui l'a fournie.

Il devra être modifié ainsi qu'il suit :

On a [*Recherches*, Ire Partie, égalité (90)]

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,d\mathrm{Q} = dt \int \Big\{ & \mathrm{T}\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \mathrm{T}^2}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x} u + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y} v + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z} w + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t}\right) \\
& - \mathrm{T}\rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial \mathrm{T}}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \\
& + 2\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right. \\
& \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]\Big\} d\varpi,
\end{aligned}$$

l'intégrale s'étendant au volume $M_1 N_1 N_2 M_2$.

Si l'on observe que ce volume est de l'ordre de ε et que $d\mathrm{Q}$ doit, selon l'égalité (19), être de l'ordre $\varepsilon\chi\, dt$, on voit que la quantité sous le signe $\int$ doit être de l'ordre de χ. Si l'on observe, d'ailleurs, que λ et μ sont des quantités du même ordre de grandeur que ε, on voit que l'on peut écrire

$$\mathrm{T}\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \mathrm{T}^2}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x} u + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y} v + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z} w + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t}\right) - \mathrm{T}\rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial \mathrm{T}}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \sigma\chi + \xi\varepsilon.$$

Écrivons cette égalité pour le point m_1, puis pour le point m_2, et retranchons membre à membre les résultats obtenus; nous retrouvons l'égalité

$$(20) \qquad \begin{aligned}
& \mathrm{T}\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \mathrm{T}^2}\left[\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}\right)_1 u + \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y}\right)_1 v + \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z}\right)_1 w + \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t}\right)_1\right] \\
& \quad - \mathrm{T}\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial \mathrm{T}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_1 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_1\right] = \nu\chi + \varpi\varepsilon.
\end{aligned}$$

Quant à l'égalité (22), elle devra être complétée en ajoutant au premier membre [*Recherches*, Ire Partie, égalité (94)] les termes

$$\frac{\lambda}{E}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2$$

$$+\frac{2\mu}{E}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right].$$

Ces termes, qui ont en facteur λ ou μ, sont de l'ordre de ε; il ne modifient donc rien aux conclusions tirées de l'égalité (22).

En résumé, *dans un milieu très peu visqueux, une quasi-onde dont l'épaisseur ε est du même ordre de grandeur que les coefficients de viscosité λ et μ, se propage sensiblement suivant les mêmes lois qu'en un fluide parfait.*

CONCLUSION DE LA TROISIÈME PARTIE.

Nous voyons, par ce qui précède, que dans l'air ou dans tout autre gaz très peu conducteur et très peu visqueux, on n'a jamais observé la propagation d'une onde proprement dite; ce qui semble une onde à l'expérimentateur apparaît au mathématicien comme une quasi-onde.

L'étude de la propagation du son avait si bien familiarisé les physiciens avec la notion d'onde et de vitesse de propagation d'une onde, que ce mode de propagation semblait à beaucoup d'entre eux le seul possible; ils répugnaient à admettre que certaines propriétés, telle la température au sein d'une masse conductrice, pussent dépendre exclusivement de fonctions analytiques de x, y, z, t, en sorte qu'il n'y eût, dans l'acte de leur propagation, ni onde, ni vitesse. Il est piquant de constater que ce mode de propagation est précisément celui qui convient au mouvement sonore dans l'air et que, même dans ce cas, l'existence d'ondes, l'existence d'une vitesse de propagation sont seulement des apparences et des approximations.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

SUR LES PRINCIPES FONDAMENTAUX DE L'HYDRODYNAMIQUE.

DEUXIÈME PARTIE.

SUR LA PROPAGATION DES ONDES.

CHAPITRE I.

CHAPITRE II.

CHAPITRE III.

CHAPITRE IV.

TROISIÈME PARTIE.

SUR LES QUASI-ONDES.

ERRATA.

M. E. Jouguet, Ingénieur au corps des Mines, Professeur à l'École des Mines de Saint-Étienne, a bien voulu me signaler les *errata* suivants; je le remercie vivement de son obligeance :

Page 8, les équations numérotées (20), (21), (22) et (23) doivent être numérotées (20 *bis*), (21 *bis*), (22 *bis*) et (23 *bis*).

Page 10, lignes 5 et 6, *au lieu de* (22), (23), *lire* (22 *bis*), (23 *bis*).

Page 25, équation (70), *au lieu de*

$$\int (X_e\,\delta x + Y_e\,\delta y + Z_e\,\delta z)\,dm,$$

lire

$$\int (X_e\,\delta x + Y_e\,\delta y + Z_e\,\delta z + A_e\,\delta\rho)\,dm.$$

Page 42, équation (111), *au lieu de* $-\mathrm{E}\,dt\int$, *lire* $+\mathrm{E}\,dt\int$.

Page 71, ligne 1, *au lieu de* la distance normale μM, *lire* la distance normale νM.

Page 83, ligne 7, en remontant, *au lieu de* $d\mathrm{T}_{\nu a}$, *lire* $d\mathfrak{T}_{\nu a}$.

Page 99, équation (68), *au lieu de*

$$\mathrm{E}\,d\mathrm{Q} = -dt\int_b \mathrm{T}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial\mathrm{T}}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial\mathrm{T}^2}\frac{d\mathrm{T}}{dt}\right)dm,$$

lire

$$\mathrm{E}\,d\mathrm{Q} = dt\int_b \mathrm{T}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial\mathrm{T}}\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial\mathrm{T}^2}\frac{d\mathrm{T}}{dt}\right)dm.$$

Page 101, équation (77), au second terme du second membre, faire précéder, sous le signe $\int_b$, la quantité entre crochets du symbole $\frac{d}{dt}$.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

33060 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS.
Quai des Grands-Augustins, 55.

DUHEM, chargé d'un cours complémentaire de Physique mathématique et de Cristallographie à la Faculté des Sciences de Lille. — **Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme.** 3 volumes grand in-8, avec 215 figures, se vendant séparément :

TOME I : *Conducteurs à l'état permanent*; avec 112 fig.; 1891. 16 fr.
TOME II : *Les aimants et les corps diélectriques*; av. 32 fig.; 1892. 14 fr.
TOME III : *Les courants linéaires*; avec 71 figures; 1892..... 15 fr.

DUHEM (P.), Chargé d'un Cours complémentaire de Physique mathématique et de Cristallographie à la Faculté des Sciences de Lille. — **Applications de la Thermodynamique à la Mécanique chimique.** (Extrait des *Travaux et Mémoires* des Facultés de Lille.)

TOME I. — *Sur la continuité entre l'état liquide et l'état gazeux et sur la théorie générale des vapeurs.* Grand in-8°; 1891 ... 3 fr. 50 c.
TOME II. — *Sur la dissociation dans les systèmes qui renferment un mélange de gaz parfaits.* Grand in-8°; 1892..................... 6 fr.
TOME III. — *Dissolutions et mélanges* (1er Mémoire). *L'équilibre et le mouvement des fluides mélangés.* Grand in-8°; 1893....... 4 fr. 50 c.
TOME III. — *Dissolutions et mélanges* (2e Mémoire). *Les propriétés physiques des dissolutions.* Grand in-8°; 1893............. 4 fr. 50 c.
TOME III. — *Dissolutions et mélanges* (3e Mémoire). *Les mélanges doubles.* Grand in-8°; 1894.............................. 4 fr. 50 c.

JAMIN (J.), Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, Professeur de Physique à l'École Polytechnique, et **E. BOUTY**, Professeur à la Faculté des Sciences. — **Cours de Physique de l'École Polytechnique.** 4e édition, augmentée et entièrement refondue. 4 forts volumes in-8, de plus de 4000 pages, avec 1587 figures et 14 planches sur acier, dont 2 en couleur; 1885-1891. (*Autorisé par décision ministérielle.*) OUVRAGE COMPLET... 72 fr.

On vend séparément :

TOME I. — 9 fr.

1er FASCICULE. — *Instruments de mesure. Hydrostatique;* avec 150 figures et 1 planche.. 5 fr.
2e FASCICULE. — *Physique moléculaire;* avec 93 figures....... 4 fr.

TOME II. — CHALEUR. — 15 fr.

1er FASCICULE. — *Thermométrie. Dilatations;* avec 98 figures.. 5 fr.
2e FASCICULE. — *Calorimétrie;* avec 48 figures et 2 planches.. 5 fr.
3e FASCICULE. — *Thermodynamique. Propagation de la chaleur;* avec 47 figures.. 5 fr.

TOME III. — ACOUSTIQUE; OPTIQUE. — 22 fr.

1er FASCICULE. — *Acoustique;* avec 123 figures............. 4 fr.
2e FASCICULE. — *Optique géométrique;* avec 139 figures et 3 planches.. 4 fr.
3e FASCICULE. — *Étude des radiations lumineuses, chimiques et calorifiques. Optique physique;* avec 249 fig. et 5 planches, dont 2 planches de spectres en couleur.. 14 fr.

TOME IV (1re Partie). — ÉLECTRICITÉ STATIQUE ET DYNAMIQUE. — 13 fr.

1er FASCICULE. — *Gravitation universelle. Électricité statique;* avec 55 figures et 1 planche.. 7 fr.
2e FASCICULE. — *La pile. Phénomènes électrothermiques et électrochimiques;* avec 161 figures et 1 planche............................ 6 fr.

TOME IV (2e Partie). — MAGNÉTISME; APPLICATIONS. — 13 fr.

3e FASCICULE. — *Les aimants. Magnétisme. Électromagnétisme. Induction;* avec 240 figures.. 8 fr.
4e FASCICULE. — *Météorologie électrique. Applications de l'électricité. Théorie générale;* avec 84 figures et 1 planche............ 5 fr.

— **Tables générales**, par ordre de matières et par noms d'auteurs, des quatre volumes du *Cours de Physique*. In-8; 1891......... 0 fr. 60 c.

Des **Suppléments** *destinés à exposer les progrès accomplis viendront compléter ce grand Traité et le maintenir au courant des derniers travaux.*

Ier SUPPLÉMENT. — **Chaleur, Acoustique et Optique**, par E. BOUTY, Professeur à la Faculté des Sciences. In-8, avec 41 fig.; 1896. 3 fr. 50 c.
IIe SUPPLÉMENT. — **Électricité. Ondes hertziennes. Rayons X**, par E. BOUTY, Professeur à la Faculté des Sciences. In-8, avec 48 figures; 1899.. 3 fr. 50 c.

RESAL (H.), Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique et à l'École des Mines, Inspecteur général des Mines, adjoint au Comité d'Artillerie pour les études scientifiques. — **Traité de Mécanique générale** comprenant les *Leçons professées à l'École Polytechnique et à l'École des Mines*. 7 volumes in-8, se vendant séparément :

MÉCANIQUE RATIONNELLE.

TOME I : *Cinématique. — Théorèmes généraux de la Mécanique. — De l'équilibre et du mouvement des corps solides.* 2e édition. In-8, avec 47 figures; 1895................................ 6 fr. 50 c.
TOME II : *Du mouvement des solides en égard aux frottements. — Équilibre intérieur. — Elasticité. — Hydrostatique. — Hydrodynamique. — Hydraulique.* 2e édition. In-8, avec 41 figures; 1895........ 3 fr.

MÉCANIQUE APPLIQUÉE (Moteurs et Machines).

TOME III : *Des machines considérées au point de vue des transformations de mouvement et de la transformation du travail des forces. — Application de la Mécanique à l'Horlogerie.* In-8, avec 213 belles figures; 1875.. 11 fr.
TOME IV : *Moteurs animés. — De l'eau et du vent considérés comme moteurs. — Machines hydrauliques et élévatoires. — Machines à vapeur, à air chaud et à gaz.* In-8, avec 206 belles figures levées et dessinées d'après les meilleurs types; 1876.................. 15 fr.

CONSTRUCTIONS.

TOME V : *Résistance des matériaux. — Constructions en bois. — Maçonneries. — Fondations. — Murs de soutènement. — Réservoirs.* In-8, avec 308 belles figures, levées et dessinées d'après les meilleurs types; 1880.. 12 fr. 50 c.
TOME VI : *Voûtes droites et biaises, en dôme, etc. — Ponts en bois. — Planchers et combles en fer. — Ponts suspendus. — Ponts-levis. — Cheminées. — Fondations de machines industrielles. — Amélioration des cours d'eau. — Substruction des chemins de fer. — Navigation intérieure. — Ports de mer.* In-8, avec 519 figures et 5 planches chromolithographiques; 1881.. 15 fr.

DÉVELOPPEMENTS ET EXERCICES.

TOME VII : *Développements sur la Mécanique rationnelle et la Cinématique pure,* comprenant de nombreux *Exercices.* In-8, av. 43 fig.; 1889. 12 fr.

33298 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.